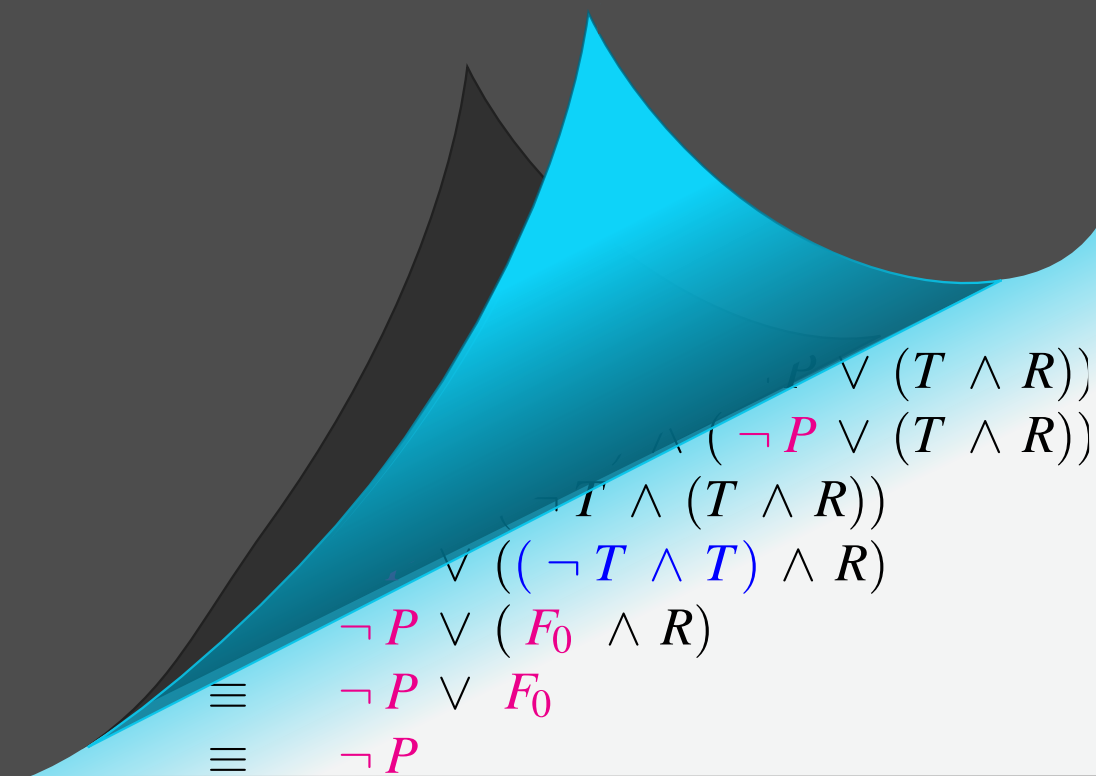


Introducción a la Matemática Discreta



R. Solís
W. Mora
J. Chinchilla
E. Carrera



Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Walter Mora F.
Luis E. Carrera R.
Rebeca Solís O.
Jorge L. Chinchilla V.

Introducción a la **Matemática Discreta**

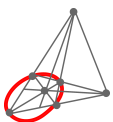
Teoría, ejemplos, ejercicios y solución

II Semestre, 2019

Compartir



https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/



Revista digital

Matemática, Educación e Internet. (<https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/>).

Contents

1	INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA	PÁGINA 3
1.1	Proposiciones	3
1.2	Proposiciones compuestas. Tablas de verdad	4
1.3	Equivalencias lógicas y simplificación	10
1.4	Cuantificadores	17
1.5	Inferencias lógicas	24
1.6	Epílogo	33
2	TEORÍA INTUITIVA DE CONJUNTOS	PÁGINA 34
2.1	Introducción	34
2.2	Cardinalidad	42
2.3	Leyes de conjuntos (y sus análogas en lógica)	47
2.4	Demostración de afirmaciones	49
3	RELACIONES BINARIAS	PÁGINA 58
3.1	Operaciones con relaciones	60
3.2	Matriz asociada a una relación	64
	Dígrafos (grafos dirigidos)	77
3.3	Propiedades de las relaciones	78
3.4	Relaciones de equivalencia	86
3.5	Relaciones de orden	96
4	FUNCIONES	PÁGINA 111
4.1	Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.	115
4.2	Función invertible.	122
5	INDUCCIÓN MATEMÁTICA	PÁGINA 132

6	RELACIONES DE RECURRENCIA	PÁGINA 140
6.1	Introducción	140
6.2	Sucesiones de recurrencia homogéneas.	141
7	ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS	PÁGINA 148
7.1	Ley de composición interna	148
7.2	Grupos	151
	Los grupos $(\mathbb{Z}_m, +)$ y (\mathbb{Z}_m^*, \cdot)	156
7.3	Subgrupos	165
	(*) Grupos cíclicos	169
	BIBLIOGRAFÍA	PÁGINA 172
8	SOLUCIÓN DE LOS EJERCICIOS	PÁGINA 174

Créditos

Este libro contiene teoría, ejemplos y ejercicios del curso “Matemática Discreta” que se imparte en el Instituto Tecnológico de Costa Rica. Muchos de los ejercicios se han tomado de exámenes del curso de Matemática Discreta, en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, de años anteriores.

Walter Mora Flores

Luis E. Carrera R.

Rebeca Solís O.

Jorge L. Chinchilla V.



Este material se distribuye bajo licencia Creative Commons “Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional” (CC BY-NC-ND 4.0) (ver; <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>)

Citar como:

Walter Mora F. et al “Introducción a la matemática discreta. Teoría, ejemplos y soluciones”.
Revista digital, Matemática, Educación e Internet.
<https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/Libros/>.

Introducción a la Lógica

1.1 Proposiciones

"The computer and programming languages were invented by logicians as the unexpected product of their unsuccessful effort to formalize reasoning completely. Formalism failed for reasoning, but it succeeded brilliantly for computation. In practice, programming requires more precision than proving theorems!

...But it's possible to argue that the (Gödel) incompleteness theorems completely miss the point because mathematics isn't about the consequences of rules, it's about creativity and imagination."

G. Chaitin [9].

La parte más simple de la lógica matemática es la *lógica proposicional*. Las leyes de la lógica son usadas para distinguir entre argumentos válidos o inválidos. La maquinaria de la lógica proposicional permite formalizar y teorizar sobre la validez de una gran cantidad de argumentos. Sin embargo, también existen argumentos que son intuitivamente válidos, pero cuya validez no se puede probar por la lógica proposicional. El propósito de este tema, en este curso, es el de enseñar al estudiante cómo entender y como contruir un argumento matemático de manera correcta.

Una proposición es una afirmación que es, sin ninguna ambigüedad, verdadera (V) ó falsa (F), es decir, no hay puntos intermedios. Las proposiciones se denotan con las letras P, Q, R, \dots y a veces también se usan minúsculas p, q, r, \dots

En language natural nos interesan dos cosas, el valor de verdad (V o F) y el significado. Pero a la *lógica proposicional* le interesa el "valor de verdad" de las proposiciones, no su significado.

Ejemplo 1.1

- P : " $2 > 3$ " es una proposición pues es una afirmación falsa (F)
- Q : " $5 > 1$ " es una proposición pues es una afirmación verdadera (V)
- Sea $x \in \mathbb{R}$. Entonces R : " $x + 1 = 3$ " no es un proposición pues no es F ni V , su valor de verdad depende del valor de x

Principios fundamentales de la lógica formal. Tenemos tres principios

- a.) **Principio de Identidad:** Si una proposición es verdadera, siempre es verdadera
- b.) **Principio de No-contradicción:** Ninguna proposición es falsa y verdadera
- c.) **Principio del Tercero Excluído:** Una proposición o es falsa o es verdadera (no hay una tercera posibilidad)

La paradoja del mentiroso: Consideremos la afirmación: "Esta oración es falsa". Si fuera una proposición, por el principio del tercero excluído, debe ser verdadera o falsa, pero no es posible asignar un valor de verdad a la oración sin contradecirse: Si suponemos que la oración es verdadera, entonces todo lo que la oración afirma es falso. Pero la oración afirma que ella misma es falsa, y eso contradice nuestra suposición original de que es verdadera. Supongamos, pues, que la oración es falsa. Luego, lo que afirma debe ser falso. Pero esto significa que es falso que ella misma sea falsa, lo cual vuelve a contradecir nuestra suposición anterior

1.2 Proposiciones compuestas. Tablas de verdad

Muchas proposiciones son *compuestas*, están formadas por varias proposiciones ligados por partículas especiales del lenguaje llamadas "conectivas". Por ejemplo $R : "2 > 3"$ y $q : "5 > 1"$ es una proposición formada por dos proposiciones, la *conectiva* es la "y".

La negación de la proposición P es $\neg P$. Por ejemplo, la negación de $P : "Todos los números pares son divisibles por dos"$ sería $\neg P : "Existe al menos un número par que no es divisible por dos"$.

La conectiva llamada conjunción se denota con \wedge . La proposición $P \wedge Q$ se lee " P y Q "

La conectiva llamada disyunción se denota con \vee . La proposición $P \vee Q$ se lee " P o Q "

La conectiva llamada disyunción exclusiva se denota con $\underline{\vee}$. La proposición $P \underline{\vee} Q$ se lee " P ó Q "

La conectiva llamada implicación se denota con " \rightarrow ". La proposición $P \rightarrow Q$ se lee " P implica Q " o también "Si P entonces Q ".

A la lógica le interesa solo el valor de verdad de la proposición " P implica Q ". En lenguaje natural, la palabra "implica" involucra el significado de las proposiciones, así que tenemos que manernos en el entorno de la lógica matemática.

La conectiva llamada equivalencia se denota con “ \equiv ”. La proposición $P \equiv Q$ se lee “ P es lógicamente equivalente a Q ”. También se puede denotar $P \longleftrightarrow Q$. Dos proposiciones son equivalentes si y solo si tienen el mismo valor de verdad.

Por ejemplo,

$$\text{a.) } P \vee Q \equiv Q \vee P$$

$$\text{b.) } P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

Tablas de verdad. Para determinar el valor de verdad de una *proposición compuesta* necesitamos conocer el valor de verdad de las proposiciones que la componen. Una tabla de verdad es una tabla que muestra el valor de verdad de una proposición compuesta para cada combinación de verdad que se pueda asignar a cada componente individual.

Las tablas de verdad básicas son:

Tabla 1.1: Tablas de verdad básicas

Negación		Conjunción		Disyunción		Implicación		Equivalencia		
P	$\neg P$	P	Q	$P \wedge Q$	P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \equiv Q$
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	V	F	F
		F	V	F	F	V	V	F	V	F
		F	F	F	F	F	F	V	F	V

Implicación: En la tabla de la “implicación”, las dos últimas líneas dicen algo como “Falso implica cualquier cosa” y esto podría parecer “contra-intuitivo”. Uno puede asumir que esto simplemente está definido así como un valor “por defecto” o para que sea consistente con la inferencia lógica conocida como “Modus Tollens” (que veremos más adelante), o que se puede deducir de otras equivalencias. En todo caso, en toda la matemática no vamos a encontrar un teorema con la forma “falso implica verdadero”, etc.

La implicación lógica no cuadra bien con “si A entonces B” del lenguaje natural: Podemos crear muchos absurdos. Pero para tener alguna intuición, podemos decir que $P \rightarrow Q$ es una “promesa Q en el caso que se cumpla P ”. La única manera de que hablemos con falsedad es que se cumpla P pero que no cumplamos Q !. Si no se cumple P , la promesa no es falsa. En resumen: $P \rightarrow Q$ solo es F si la hipótesis P es V pero la conclusión Q es F.

Hay una anécdota del filósofo y lógico Bertand Russell.

Si 1=2 entonces yo soy el Papa. “The story goes that Bertrand Russell, in a lecture on logic, mentioned that in the sense of material implication, a false proposition implies any proposition.

A student raised his hand and said 'In that case, given that $1 = 0$, prove that you are the Pope.'

Russell immediately replied, 'Add 1 to both sides of the equation: then we have $2 = 1$. The set containing just me and the Pope has 2 members. But $2 = 1$, so it has only 1 member; therefore, I am the Pope.'

Pruebas de teoremas con tablas de verdad. Un teorema es una proposición cuya validez se puede obtener como consecuencia lógica de los axiomas, definiciones u otros teoremas. En lógica proposicional, una proposición compuesta por P , Q , R , etc. que es una implicación o equivalencia, es un teorema válido si su valor de verdad es V para todos los posibles valores de verdad de P , Q , R , etc. En este caso también decimos la proposición es una *tautología*.

Tautologías, contradicciones y contingencias.

Como dijimos antes, una proposición compuesta es una *tautología* si es verdadera para todos los valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen.

Si una proposición es falsa para todos los valores de verdad de las proposiciones atómicas que la componen, la proposición es una *contradicción* o *falacia*.

Si una proposición compuesta no es tautología ni contradicción, es una *contingencia* o *eventualidad*.

Si P y Q son proposiciones compuestas, entonces

- si $P \rightarrow Q$ es una tautología, se escribe $P \implies Q$ ("implicación tautológica").
- si $P \longleftrightarrow Q$ es una tautología, se escribe $P \iff Q$

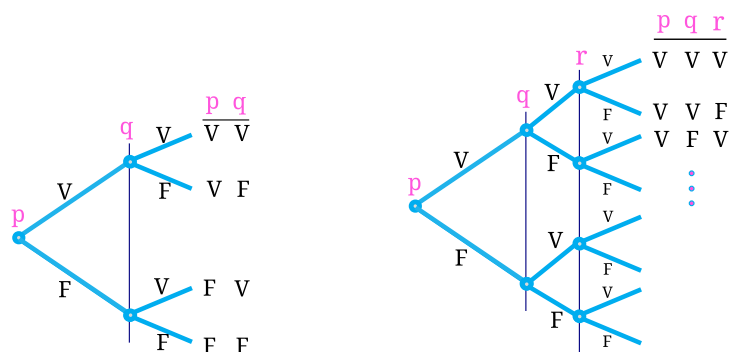
Ejemplo 1.2

Use una tabla de verdad para probar que $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

Solución: Una tabla de verdad requiere todas las combinaciones de los valores de verdad de P , Q y los valores de verdad de cada componente $\neg(P \wedge Q)$ y $\neg P \vee \neg Q$ y la equivalencia que queremos verificar: $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$

P	Q	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Si p, q, r son proposiciones, las combinaciones de valores de verdad de las proposiciones se puede hacer de manera ordenada usando una árbol binario.



Ejemplo 1.3

Use una tabla de verdad para probar que $P \vee Q \neq P \wedge Q$

Solución: Ejercicio. Hacemos una tabla de verdad y verificamos que $P \vee Q \equiv P \wedge Q$ **no es** una tautología.

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q \equiv P \wedge Q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Ejemplo 1.4

Use una tabla de verdad para probar que $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ es una tautología.

Solución: Ejercicio.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Ejemplo 1.5

Use una tabla de verdad para probar que $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \implies (P \rightarrow R)$

Solución: La presencia de " \implies " significa que hay que verificar que esta proposición compuesta es una tautología.

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow R$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow R$	$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Ejemplo 1.6

Use una tabla de verdad para probar que $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

Solución: Ejercicio.

P	Q	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Ejercicios

1.2.1 Use tablas de verdad para determinar si las siguientes proposiciones son tautologías, contradicciones (falacias) o contingencias.

1) $P \equiv \neg \neg P$

2) $P \wedge Q \equiv P$

3) $P \equiv P \vee Q$

4) $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \equiv \neg P$

5) $(P \rightarrow Q) \wedge P \equiv Q$

6) $(P \vee Q) \wedge \neg Q \equiv P$


7) $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow S) \equiv S \vee Q$

8) $(\neg P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \vee P)$

9) $\neg(P \rightarrow Q) \longleftrightarrow (P \wedge \neg Q)$

10) $(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \longleftrightarrow Q)$

11) $(P \vee Q) \rightarrow [Q \rightarrow (P \wedge Q)]$

 **1.2.2** Utilice tablas de verdad para determinar cuales de las siguientes proposiciones son tautologías, falacias o contingencias.


1) $[(\neg P \vee Q) \rightarrow R] \longleftrightarrow [(P \wedge \neg R) \rightarrow \neg Q]$

2) $[\neg(P \wedge Q) \vee R] \longleftrightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]$

3) $[(Q \wedge \neg P) \rightarrow R] \longleftrightarrow [\neg R \rightarrow (\neg Q \vee P)]$

4) $[(P \rightarrow Q) \rightarrow R] \longleftrightarrow [(P \wedge \neg R) \rightarrow \neg Q]$

5) $[P \wedge (Q \rightarrow \neg R)] \longleftrightarrow (\neg Q \vee P)$

 **1.2.3** Utilizando tablas de verdad, determine la veracidad de las siguientes afirmaciones

1) Verifique que $((P \rightarrow Q) \wedge P) \not\equiv Q$ pero que $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ sí es una tautología

2) $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$ implica tautológicamente a la proposición $\neg P$.

3) $(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \rightarrow P)$ implica tautológicamente a $Q \vee R$.

4) $(P \rightarrow Q) \vee [(\neg Q \rightarrow \neg P) \wedge \neg R]$ es tautológicamente equivalente a $\neg(P \wedge \neg Q)$

5) Verifique que $(P \wedge Q) \not\equiv Q$ pero que $(P \wedge Q) \rightarrow Q$ sí es una tautología

1.3 Equivalencias lógicas y simplificación

No siempre tenemos que usar tablas de verdad para probar una equivalencia lógica. A partir de una tabla de equivalencias lógicas preestablecidas, se puede deducir y probar otras equivalencias usando *simplificación*. Aquí vamos a usar la notación \equiv para equivalencia, V_0 para tautología (*proposición siempre verdadera*), F_0 para contradicción o falacia (*proposición siempre falsa*).

Primero iniciamos con una tabla de equivalencias lógicas.

Implicación-disyunción (ID)	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
Contrapositiva	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$
DN	$\neg \neg P \equiv P$
De Morgan	$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ $\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Conmutatividad	$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Asociatividad	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$ $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$
Distributividad	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$ $P \vee P \equiv P$
Inversos	$P \vee \neg P \equiv V_0$ $P \wedge \neg P \equiv F_0$
Neutro	$P \vee F_0 \equiv P$ $P \wedge V_0 \equiv P$
Dominación	$P \wedge F_0 \equiv F_0$ $P \vee V_0 \equiv V_0$
Absorción	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$ $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
Exportación	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \rightarrow R$

Ahora, usando esta última tabla podemos hacer simplificaciones o también pruebas de equivalencias.

La equivalencias y sus sabores. Es usual encontrar las equivalencias de la tabla anterior, con sabores distintos. Por ejemplo

a.) $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$ se puede encontrar como

$$\bullet \neg P \rightarrow Q \equiv P \vee Q$$

$$\bullet (P \vee R) \rightarrow Q \equiv \neg(P \vee R) \vee Q$$

$$\bullet P \rightarrow \neg Q \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$\text{b.) } P \vee (P \wedge Q) \equiv P \text{ se puede encontrar como } (P \vee R) \vee ((P \vee R) \wedge Q) \equiv P \vee R$$

Ejemplo 1.7 (I Parcial MD, II -2019)

Determine el valor de verdad para las proposiciones P, Q y R que evidencien que la proposición $[(P \vee Q)] \rightarrow \neg R] \wedge \neg P$ no implique tautológicamente a $Q \vee \neg R$.

Solución: “ $[(P \vee Q)] \rightarrow \neg R] \wedge \neg P$ no implica tautológicamente a $Q \vee \neg R$ ” si el valor de verdad de $[(P \vee Q)] \rightarrow \neg R] \wedge \neg P \rightarrow (Q \vee \neg R)$ es falso para alguna combinación de valores de verdad de P, Q y R . Para esto solo es necesario establecer una combinación de valores de verdad de P, Q y R de tal manera que $[(P \vee Q)] \rightarrow \neg R] \wedge \neg P$ sea verdadero y $Q \vee \neg R$ sea falso.

• $Q \vee \neg R$ es falso si Q es F y si R es V . Sabiendo esto, obtenemos el valor de verdad de P por deducción o usando una fila en la tabla de verdad

P	Q	R	$(P \vee Q)$	$[(P \vee Q)] \rightarrow \neg R] \wedge \neg P$	$[(P \vee Q)] \rightarrow \neg R] \wedge \neg P \rightarrow (Q \vee \neg R)$
F	F	V	F	V	F

Por tanto P, Q deben ser falsas y R es verdadera.

Ejemplo 1.8

Suponga que $(P \rightarrow Q) \wedge R$ es verdadera. Determine el valor de verdad de las proposiciones

a.) $(\neg P \vee T) \vee Q$

b.) $\neg R \rightarrow S$

c.) $[(\neg P \vee T) \vee Q] \wedge (\neg R \rightarrow S)$

Solución: De acuerdo a las tablas de verdad 1.1 tenemos $(P \rightarrow Q) \wedge R$ es verdadero solo si $(P \rightarrow Q)$ y R son verdaderas. Por tanto,

$$(P \rightarrow Q) \wedge R \text{ es verdadera entonces } \begin{cases} P \rightarrow Q \text{ es verdadera} \\ R \text{ es verdadera} \end{cases}$$

a.) Simplificamos: $(\neg P \vee T) \vee Q \equiv (\neg P \vee Q) \vee T$ Commutatividad, asociatividad
 $\equiv (P \rightarrow Q) \vee T$ ID

Y, de acuerdo a la tabla de verdad para la conectiva “ \vee ”, como $P \rightarrow Q$ es V entonces
 $(\neg P \vee T) \vee Q \equiv \underbrace{(P \rightarrow Q)}_V \vee T$ es verdadera (sin importar el valor de verdad de T)

b.) Como R es verdadera $\neg R$ es falsa y entonces, de acuerdo a la tabla de verdad para la conectiva “ \rightarrow ”, la proposición $\underbrace{\neg R}_F \rightarrow S$ es V sin importar el valor de verdad de S

Observe que, también por ID, $(\neg R \rightarrow S) \equiv \underbrace{R}_V \vee S$ es verdadera

c.) De los ítems anteriores y de acuerdo a la tabla de verdad para la conectiva “ \wedge ”

$$\therefore \underbrace{[(\neg P \vee T) \vee Q]}_V \wedge \underbrace{(\neg R \rightarrow S)}_V \text{ es verdadera}$$

Ejemplo 1.9

Sean A, B, C, D y E proposiciones tales que $(A \wedge \neg B) \rightarrow C$ es falso. Determine el valor de verdad de la proposición.

$$[(A \vee D) \wedge (B \wedge D)] \rightarrow (C \vee E)$$

Solución: De acuerdo a la tabla de verdad para la conectiva “ \rightarrow ”, la implicación $(A \wedge \neg B) \rightarrow C$ es falsa solo si $(A \wedge \neg B)$ es verdadera y C es falsa. Por tanto,

$$\text{Si } (A \wedge \neg B) \rightarrow C \text{ es falsa entonces } \begin{cases} A \wedge \neg B \text{ es verdadera} \\ C \text{ es falsa} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \wedge \neg B \text{ es verdadera} \\ C \text{ es falsa} \end{cases} \text{ entonces } \begin{cases} A \text{ es verdadera} \\ \neg B \text{ es verdadera, es decir, } B \text{ es falsa} \\ C \text{ es falsa} \end{cases}$$

Tenemos,

$$\begin{cases} A \vee D \text{ es verdadera} \\ B \wedge D \text{ es falsa, pues } B \text{ es falsa} \\ (A \vee D) \wedge (B \wedge D) \text{ es falsa} \end{cases}$$

\therefore Como $(A \vee D) \wedge (B \wedge D)$ es falsa $\underbrace{[(A \vee D) \wedge (B \wedge D)]}_F \rightarrow (C \vee E)$ es verdadera

Ejemplo 1.10

Determine el valor de verdad de las proposiciones A, B, C y D de manera que la siguiente proposición sea falsa.

$$\neg [A \rightarrow (D \wedge B)] \vee [C \rightarrow (B \vee (A \longleftrightarrow D))]$$

Solución: Una disyunción $\neg [A \rightarrow (D \wedge B)] \vee [C \rightarrow (B \vee (A \longleftrightarrow D))]$ es falsa solo si las proposiciones que conecta son falsas. Por tanto debería ser que

- $A \rightarrow (D \wedge B)$ es verdadera
- $C \rightarrow (B \vee (A \longleftrightarrow D))$ es falsa.

Si $A \rightarrow (D \wedge B)$ es verdadera, hay varias posibilidades, es mejor empezar analizando el ítem b.)

- $C \rightarrow (B \vee (A \longleftrightarrow D))$ es falsa si C es verdadera y si $(B \vee (A \longleftrightarrow D))$ es falsa, es decir, necesitamos que B sea falsa y A y D tengan valor de verdad diferente.

$\therefore C \rightarrow (B \vee (A \longleftrightarrow D))$ es falsa si B sea falsa y si A y D tienen valor de verdad distinto.

- Como B debe ser falsa, A debe ser falsa para que $A \rightarrow (D \wedge B)$ sea verdadera.

En resumen: A y B son falsas y C y D son verdaderas.

Pruebas de equivalencias usando la tabla de equivalencias lógicas

Ejemplo 1.11

Probar que $P \wedge (Q \vee \neg Q) \equiv P$

Solución:

$$\begin{aligned} P \wedge (Q \vee \neg Q) &\equiv P \wedge V_0 && \text{Inversos} \\ &\equiv P && \text{Neutro} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.12

Probar que $P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$

Solución:

$$\begin{aligned} P \rightarrow (Q \wedge R) &\stackrel{\text{ID}}{\equiv} \neg P \vee (Q \wedge R) && \text{ahora usamos distributividad,} \\ &\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R) && \text{ahora usamos ID,} \\ &\equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \end{aligned}$$

Ejemplo 1.13

Probar que $P \vee \neg(\neg R \vee P) \vee R \equiv P \vee R$

Solución: Iniciamos usando De Morgan,

$$\begin{aligned} P \vee \neg(\neg R \vee P) \vee R &\stackrel{\text{DM}}{\equiv} P \vee (R \wedge \neg P) \vee R, && \text{agrupamos y usamos distributividad,} \\ &\equiv [P \vee (R \wedge \neg P)] \vee R && \text{distributividad} \\ &\equiv [(P \vee R) \wedge (P \vee \neg P)] \vee R, && \text{ahora usamos inv. y neutro,} \\ &\equiv [(P \vee R) \wedge \mathbf{V_0}] \vee R, && \text{ahora usamos idempotencia y asoc.,} \\ &\equiv P \vee R \vee R \\ &\equiv P \vee R \end{aligned}$$

Otra manera:

$$\begin{aligned} P \vee \neg(\neg R \vee P) \vee R &\stackrel{\text{DM}}{\equiv} P \vee (R \wedge \neg P) \vee R && \text{podemos usar absorción...} \\ &\equiv P \vee R \vee (R \wedge \neg P) && \text{Commutatividad y absorción...} \\ &\equiv P \vee R \end{aligned}$$

Ejemplo 1.14

Probar que $\neg[(Q \vee P) \wedge \neg((\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \wedge (P \vee R))] \equiv \neg P \wedge \neg Q$.

Solución:

$$\begin{aligned} \neg[(Q \vee P) \wedge \neg((\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \wedge (P \vee R))] &\equiv \neg[(Q \vee P) \wedge (P \vee Q \vee \neg R \vee \neg(P \vee R))] && \text{DM} \\ &\equiv \neg[(P \vee Q) \wedge ((P \vee Q) \vee (\neg R \vee \neg(P \vee R)))] && \dots \\ &\equiv \neg(P \vee Q) && \dots \\ &\equiv \neg P \wedge \neg Q && \dots \end{aligned}$$

Ejemplo 1.15

Sean $P, Q,$ y R proposiciones. Demuestre que se tienen las siguientes equivalencias,

$$\text{a.) } P \rightarrow (Q \wedge R) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$$

$$\text{b.) } (P \wedge Q) \rightarrow R \equiv (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$$

$$\text{c.) } P \rightarrow (Q \vee R) \equiv (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$$

$$\text{d.) } (P \vee Q) \rightarrow R \equiv (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$$

Solución: a.) ya los hicimos en el ejemplo 1.7, b). Haremos solo b.). Los ítems c.) y d.) quedan como ejercicios.

$$\text{b.) } \left\{ \begin{array}{ll} (P \wedge Q) \rightarrow R & \stackrel{\text{ID}}{\equiv} \neg(P \wedge Q) \vee R, & \text{ahora usamos De Morgan} \\ & \equiv \neg P \vee \neg Q \vee R, & \text{ahora usamos idempotencia : } R \equiv R \vee R \\ & \equiv \neg P \vee \neg Q \vee R \vee R, & \text{ahora usamos asociatividad} \\ & \equiv (\neg P \vee R) \vee (\neg Q \vee R), & \text{usando ID:} \\ & \equiv (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \end{array} \right.$$

Ejemplo 1.16

Probar $\neg [P \wedge \neg (T \wedge R)] \wedge (T \rightarrow \neg P) \equiv \neg P$

Solución: Primero visualizamos un plan: Distributividad. Reacomodamos todo

$$\begin{aligned} \neg [P \wedge \neg (T \wedge R)] \wedge (T \rightarrow \neg P) &\equiv (\neg P \vee \neg T) \wedge (\neg P \vee (T \wedge R)) && \text{ID, Morgan y conmutatividad} \\ &\equiv (\neg P \vee \neg T) \wedge (\neg P \vee (T \wedge R)) && \text{Visualizar distributividad!!!} \\ &\equiv \neg P \vee (\neg T \wedge (T \wedge R)) && \text{Distributividad} \\ &\equiv \neg P \vee ((\neg T \wedge T) \wedge R) && \text{Asociatividad, Inversos} \\ &\equiv \neg P \vee (F_0 \wedge R) && \text{Dominación} \\ &\equiv \neg P \vee F_0 && \text{Neutro} \\ &\equiv \neg P \end{aligned}$$

Ejercicios

En la solución de los ejercicios 1.3.1 hasta 1.3.9, para determinar los valores de verdad que se piden, las únicas tablas de verdad que se pueden usar son las tablas 1.1. En las soluciones se usa informalmente las letras V o F para indicar un valor de verdad *particular* para una proposición.

1.3.1 Determine el valor de verdad de las proposiciones P y Q para que la proposición $[P \wedge (P \rightarrow Q)] \longleftrightarrow Q$ sea falsa

R 1.3.2 Determine los valores de verdad de las proposiciones P , Q , R , S y T , de manera que se verifique que la proposición $(\neg P \vee Q) \wedge [(Q \vee T) \rightarrow R] \wedge [S \longleftrightarrow T]$ no implica tautológicamente a la proposición $P \rightarrow S$.

R 1.3.3 Si se sabe que la proposición $(T \vee A) \wedge (M \wedge V) \longleftrightarrow F$ es falsa, determine el valor de verdad de la proposición $[(T \wedge F) \rightarrow \neg A] \wedge (E \rightarrow M)$.

R 1.3.4 Si se sabe que la proposición $\neg(\neg P \vee H) \rightarrow (K \vee T)$ es Falsa, determine el valor de verdad de la proposición $(P \vee M) \rightarrow (K \wedge E)$.

R 1.3.5 Determine posibles valores de verdad para las proposiciones A , B , C y D de manera que $[(D \longleftrightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \vee A)]$ no implique tautológicamente a $C \rightarrow A$.

R 1.3.6 Determine el valor de verdad de P , Q , y R si se sabe que la proposición $[P \wedge (P \rightarrow Q)] \longleftrightarrow Q$ es falsa, y que la proposición $[(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)] \longleftrightarrow (Q \vee R)$ es falsa

R 1.3.7 Determine el valor de verdad de las proposiciones A , B , C y D de manera que la proposición que sigue sea falsa.

$$(D \wedge B) \vee [(B \wedge (A \longleftrightarrow \neg D)) \rightarrow C]$$

R 1.3.8 Suponga que $((A \rightarrow B) \wedge C \wedge \neg B) \rightarrow (H \vee F)$ es falso. Determine el valor de verdad de las proposiciones involucradas.

R 1.3.9 Sean A , B , y C proposiciones tales que $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$ es verdadero. Determine el valor de verdad de

$$A \rightarrow (B \vee C)$$

R 1.3.10 Complete las siguientes equivalencias

$$1) \neg p \vee q \vee r \equiv \text{ } \rightarrow r$$

$$2) \neg p \vee q \vee r \equiv \text{ } \rightarrow q$$

$$3) \neg p \vee q \vee r \equiv \text{ } \rightarrow \neg p$$

$$4) s \vee [(\neg p \vee r) \wedge \neg t] \vee q \equiv \text{ } \rightarrow (s \vee q)$$

R 1.3.11 Simplifique las siguientes expresiones. Indique la ley que utiliza a cada paso.

$$1) (\neg P \wedge Q) \vee [\neg(Q \wedge R) \wedge \neg P] \vee (P \wedge \neg R)$$


$$2) (Q \rightarrow P) \wedge \{[\neg(R \wedge \neg P) \wedge (Q \vee P)] \vee (R \wedge P)\}$$

$$3) [\neg P \vee (\neg Q \wedge P)] \vee [\neg Q \wedge (\neg P \rightarrow Q)]$$

$$4) \neg\{(Q \vee P) \wedge \neg[(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]\}$$

$$5) [(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow P)] \wedge \neg Q$$

$$6) (P \rightarrow \neg Q) \wedge \{[\neg(R \vee \neg P) \wedge (Q \vee P)] \vee (R \wedge P)\}$$

 **1.3.12** Pruebe las siguientes equivalencias haciendo uso de las leyes de la lógica. Indique la ley que utiliza en cada paso.

$$1) [\neg P \vee (\neg Q \wedge P)] \vee [\neg Q \wedge (\neg P \rightarrow Q)] \equiv \neg(P \wedge Q)$$

$$2) \neg(\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \equiv P \vee Q \vee \neg R$$

$$3) P \wedge (P \vee Q \vee S) \equiv P$$

$$4) (P \vee S) \vee (\neg Q \wedge S) \equiv P \vee S$$

$$5) P \vee (Q \wedge S) \vee (\neg Q \wedge S) \equiv P \vee S$$

$$6) [P \vee \neg(\neg Q \vee \neg S)] \vee \neg(\neg Q \rightarrow \neg S) \equiv P \vee S$$

$$7) \neg[P \wedge \neg(T \wedge R)] \wedge (T \rightarrow \neg P) \equiv \neg P$$

$$8) \neg(\neg P \wedge \neg Q \wedge R \wedge (P \vee R)) \equiv P \vee Q \vee \neg R$$

$$9) P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee \neg(P \rightarrow \neg R)$$

$$10) (R \wedge Q) \rightarrow T \equiv (R \rightarrow \neg Q) \vee [T \wedge (R \vee T)]$$

1.4 Cuantificadores

Proposición abierta o predicado. Denotamos con $P(n)$ una proposición que depende de la variable n y $Q(x,y)$ denota una proposición que depende de las variables x e y . El *universo del discurso*, o *dominio*, son los objetos que se consideran en las proposiciones abiertas. Una *instanciación*¹ es un caso particular: $P(k)$ o $Q(a,b)$. Por ejemplo:

¹El término en informática procede del inglés, en donde 'instance' viene del significado que podría traducirse por 'caso' o 'ejemplo', en castellano.

- a.) Consideremos la proposición abierta " $P(n) : 2^n \geq n^2$ si n es un número natural". En este caso, la instancia $P(3)$ es falsa pues $2^3 \not\geq 3^2$
- b.) Consideremos la proposición abierta " $Q(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0$ si x, y son números reales". $Q(x, y)$ es verdadera para cualquier valor de x y y pues la suma de cuadrados es cero o positiva.

Para "cuantificar" los elementos que satisfacen una proposición se usan los cuantificadores existencial y universal.

- a.) Cuantificador existencial ($\exists x$) $[P(x)]$ se lee "existe x tal que $P(x)$ ". Es decir, existe al menos una instancia $P(x_0)$ que es verdadera.
- b.) Cuantificador universal ($\forall x$) $[P(x)]$ se lee "para todo $x, P(x)$ ". Es decir, todas las instancias $P(x)$ son verdaderas.
- c.) $\exists x \forall y [P(x, y)]$ es verdadera si y solo si existe un valor x_0 de x (un valor fijo) tal que para todos los posibles valores " y " se tiene que $P(x_0, y)$ es verdadera. Es decir, existe un x_0 que sirve para todos los y .
- d.) $\forall x \exists y [P(x, y)]$ es verdadera si y solo si para cada valor x , existe un valor " y_x ", (es decir, " y " posiblemente depende del valor del valor de x) tal que $P(x, y_x)$ es verdadero

Conjuntos especiales: Recordemos la notación para algunos conjuntos

- a.) El conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ y los naturales positivos $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$
- b.) El conjunto de los enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ y los enteros positivos $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}^*$
- c.) El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Z} \wedge q \neq 0 \right\}$
- d.) El conjunto de los números reales \mathbb{R} y los reales positivos y negativos $\mathbb{R}^+ = \{x \text{ tal que } x \in \mathbb{R} \wedge x > 0\}$ y $\mathbb{R}^- = \{x \text{ tal que } x \in \mathbb{R} \wedge x < 0\}$

Ejemplo 1.17

- a.) " $(\exists n \in \mathbb{N}) [2^n < n^2]$ " es verdadera pues existe al menos un número natural, $n_0 = 3$, cumple con la propiedad: $2^3 < 3^2$
- b.) " $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) [x^2 + y^2 \geq 0]$ " es verdadera pues la suma de cuadrados es siempre mayor o igual a cero.
- c.) " $(\exists x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) [x + y = 0]$ " es verdadera, por ejemplo tomamos $x = 1$ y $y = -1$.
- d.) " $(\exists x \in \mathbb{N}^*)(\exists y \in \mathbb{N}^*) [x + y = 0]$ " es falsa, pues como $x > 0$ y $y > 0$, entonces la suma $x + y > 0$.

N

“ $\exists x \forall y P(x, y)$ ” y “ $\forall x \exists y P(x, y)$ ” son proposiciones distintas.

Ejemplo 1.18

Considere la proposición abierta $P(x, y) : \frac{x}{y} \in \mathbb{N}$. Si $A = \{0, 6, 8, 9, 10, 15\}$ y $B = \{2, 3, 5, 7\}$, determine el valor de verdad de las proposiciones:

a.) $(\forall x \in A)(\exists y \in B)[P(x, y)]$

b.) $(\exists y \in B)(\forall x \in A)[P(x, y)]$

Solución:

a.) $(\forall x \in A)(\exists y \in B)[P(x, y)]$ es verdadera pues $\frac{0}{2}, \frac{6}{2}, \frac{8}{2}, \frac{9}{3}, \frac{10}{2}, \frac{15}{3} \in \mathbb{N}$. En este caso $y = 2$ y $y = 3$ (que son elementos de B).

b.) $(\exists y \in B)(\forall x \in A)[P(x, y)]$ es falsa pues no existe *un divisor común* $y \in B$, para todos los elementos de A . Por ejemplo, $x = 8$ y $x = 9$ no tienen un divisor común en B .

Ejemplo 1.19

a.) La proposición $P(n) : (\forall n \in \mathbb{N}^+)(\exists m \in \mathbb{N}) \left[\frac{1}{n} \leq m \right]$ es verdadera.

En efecto: Como $\forall n \in \mathbb{N}^+, n \geq 1$, dividimos por n a ambos lados y obtenemos $\frac{1}{n} \leq 1$. Tomamos $m = 1$. También existen otros valores para m , pero lo que importa aquí es que existe al menos un valor de m .

b.) La proposición $(\exists y \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}^*) [x \cdot y > 0]$ es falsa.

En efecto: Para cualquier x , **no existe un valor de y fijo** para que $xy > 0$. Si $x > 0$, sirve cualquier $y > 0$ pero si $x < 0$, se requiere un valor $y < 0$

Ejemplo 1.20

Considere las siguientes proposiciones abiertas:

- $P(x) : 3x - 1$ es un número primo
- $Q(x) : 6 \leq x < 14$
- $R(x) : x$ es un número par

Determine el valor de verdad de las proposiciones:

- a.) $(\exists x \in \mathbb{N})[P(x) \wedge Q(x) \wedge \neg R(x)]$
- b.) $(\forall x \in \mathbb{N})[(Q(x) \wedge R(x)) \rightarrow P(x)]$

Solución:

- a.) Falsa. Los números x que cumplen $Q(x) \wedge \neg R(x)$ son los impares entre 6 y 14, es decir, $S = \{7, 9, 11, 13\}$. Pero si $x \in S$, $3x - 1$ no es primo (son pares > 2).
- b.) Falsa. Los números x que cumplen $Q(x) \wedge R(x)$ son los pares $S = \{6, 8, 10, 12\}$. Pero si $x \in S$, $3x - 1$ no es necesariamente primo (por ejemplo si $x = 12 \implies 3x - 1 = 35$ que no es primo).

Ejemplo 1.21

Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \text{ tal que } -2x + 3 = -9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $C = \{2, 3, 6, 7, 8\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando cada respuesta:

- a.) $(\forall x \in B)(\exists y \in C) [x + 1 = y]$
- b.) $\exists x [x \in B \rightarrow (x^2 + 2) \in A \cap C]$

Solución:

- a.) Falsa pues para $x = 3 \in B$ pero $3 + 1 \notin C$
- b.) Verdadera pues existe $x = 2 \in B$ para el que $x^2 + 2 = 6 \in A \cap C$ pues $6 \in C$ y $-2 \cdot 6 + 3 = -9$, es decir, $6 \in A$.

Ejemplo 1.22 (MD-IP-2-2019).

$(\exists x \in A)(\forall y \in B)[x + y \neq 8]$ con $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Solución: Falsa. Si existiera un x_0 fijo, entonces

$$\begin{aligned} 0 + x_0 \neq 8 &\implies x_0 \neq 8 \\ 1 + x_0 \neq 8 &\implies x_0 \neq 7 \\ 2 + x_0 \neq 8 &\implies x_0 \neq 6 \\ 3 + x_0 \neq 8 &\implies x_0 \neq 5 \\ 4 + x_0 \neq 8 &\implies x_0 \neq 4 \\ 5 + x_0 \neq 8 &\implies x_0 \neq 3 \\ 6 + x_0 \neq 8 &\implies x_0 \neq 2 \\ 7 + x_0 \neq 8 &\implies x_0 \neq 1 \end{aligned} \quad \therefore x_0 \notin A$$

Teorema 1.1

- $\neg [\forall x P(x)] \equiv \exists x [\neg P(x)]$
- $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x [\neg P(x)]$
- $\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- $\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
- $\exists x P(x) \equiv \neg \forall x [\neg P(x)]$
- $\forall x P(x) \equiv \neg \exists x [\neg P(x)]$

N

Observe que

$$\neg [\forall x [P(x) \wedge Q(x)]] \equiv \exists x [\neg P(x)] \vee \exists x [\neg Q(x)]$$

$$\neg [\forall x [P(x) \vee Q(x)]] \equiv \exists x [\neg P(x)] \wedge \exists x [\neg Q(x)]$$

Ejemplo 1.23

a.) $\neg [\forall x \in \mathbb{R} [x > 0]] \equiv \exists x \in \mathbb{R} [x \leq 0]$

b.) $\neg [\forall x \in \mathbb{R} [x \neq 0]] \equiv \exists x \in \mathbb{R} [x = 0]$

c.) $\neg [\forall x \in \mathbb{R} [x > 0 \wedge x \neq 3]] \equiv \exists x \in \mathbb{R} [x \leq 0 \vee x = 3]$

Ejemplo 1.24Negar la proposición: $Q(x, y) : \forall x \in \mathbb{N} [7x + 4 < 40 \vee \forall y \in \mathbb{N} (x + y \neq 5)]$

Solución: $\neg Q(x, y) \equiv \exists x \in \mathbb{N} [7x + 4 \geq 40 \wedge \exists y \in \mathbb{N} (x + y = 5)]$

Ejemplo 1.25 $(\exists x \in A)(\forall y \in B)[x + y \neq 8]$ con $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ **Solución:** Ya sabemos por el ejemplo 1.22 que la proposición es falsa, pero lo vamos a probar negando la proposición: La proposición es falsa pues,

$$\neg [(\exists x \in A)(\forall y \in B)[x + y \neq 8]] \equiv (\forall x \in A)(\exists y \in B)[x + y = 8] \text{ es verdadera}$$

$1 + y = 8 \text{ si } y = 7$

$2 + y = 8 \text{ si } y = 6$

$3 + y = 8 \text{ si } y = 5$

$4 + y = 8 \text{ si } y = 4$

$5 + y = 8 \text{ si } y = 3$

$6 + y = 8 \text{ si } y = 2$

$7 + y = 8 \text{ si } y = 1$

Ejercicios**1.4.1** Negar las siguientes proposiciones.

1) $\exists x \in \mathbb{N} [x > 4 \wedge x^2 \leq 7]$

2) $\forall x \in \mathbb{Z} [x^2 + 2x - 3 > 0 \wedge x + 4 \leq 8]$

3) $\forall x \in \mathbb{Z} [(x + 1 = 4 \implies x \geq 3)]$

1.4.2 Contraejemplos: Dé un “contraejemplo” para la afirmación “Todo entero positivo es la suma de los cuadrados de tres enteros.”

1.4.3 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando cada respuesta:

- $(\forall x \in \mathbb{Z}^+)(\exists y \in \mathbb{Z}^+)[x = y + 1]$
- $(\exists x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+)[xy < y]$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) [x^2 = y]$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) [y^2 = x]$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) [x + y = 2 \wedge 2x - y = 1]$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) [y \neq 0 \implies xy = 1]$
- $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) [xy = 0]$

1.4.4 Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando cada respuesta:

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) [x^2 = y]$
- $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}) \left[\frac{x - y}{3 - x} + x + 1 = x \right]$

1.4.5 Pruebas por construcción: Mostrar que existe un entero positivo que puede ser expresado como la suma de cubos de enteros positivos en dos diferentes formas (Hardy-Ramanujan), es decir, $(\exists n \in \mathbb{Z}^+)(\exists p, q, r, s \in \mathbb{Z}^+)[n = p^3 + q^3 \wedge n = r^3 + s^3]$. ¿Que tal $n = 1729$?

1.4.6 Determine el valor de verdad de las proposiciones. Justifique su respuesta.

- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})[x \neq 0 \implies xy = 1]$
- $(\exists x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})[7x + 5y = 1]$
- $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})[x < y]$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})[xy = 1]$
- $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})[yx = y]$
- $m (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})[3x + 2y = 1]$

1.4.7 Si $A = \{3n - 2 \text{ tal que } n \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{3m + 4 \text{ tal que } m \in \mathbb{Z}\}$, determine si la expresión $A = B$ es verdadera o no.

1.4.8 Si $A = [0, 1]$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones (justifique):

- $\exists x \in A \wedge \exists y \in A \text{ tal que } x + y < 1.$
- $(\forall x \in A)(\forall y \in A)[\exists z \in A | x + y < z].$

1.5 Inferencias lógicas

Las reglas de inferencia intentan capturar el modo en que naturalmente razonamos acerca de las conectivas lógicas. En las inferencias tenemos unas premisas y, aplicando las reglas de inferencia (y talvez alguna equivalencia), llegamos a una conclusión. En esta tabla, la notación \therefore se puede leer “conclusión” o “por tanto”

Reglas	Premisas	Conclusión
Simplificación	$P \wedge Q$	$\therefore P$
	$P \wedge Q$	$\therefore Q$
Adjunción	P, Q	$\therefore P \wedge Q$
Adición	P	$\therefore P \vee Q$
Modus ponens	$P, P \rightarrow Q$	$\therefore Q$
Modus tollens	$P \rightarrow Q, \neg Q$	$\therefore \neg P$
Silogismo Disy	$P \vee Q, \neg P$	$\therefore Q$
Silogismo Hip	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R$	$\therefore P \rightarrow R$
Dilema Constructivo	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S$	$\therefore R \vee S$
Dilema Destructivo	$\neg R \vee \neg S, P \rightarrow R, Q \rightarrow S$	$\therefore \neg P \vee \neg Q$
Ley de casos	$P \rightarrow Q, \neg P \rightarrow R$	$\therefore Q \vee R$

N

- No hay que confundir reglas de simplificación con inferencias lógicas. Por ejemplo

“ $P, P \rightarrow Q \therefore Q$ ” es una inferencia correcta, pero $(P \wedge (P \rightarrow Q)) \neq Q$

- Las inferencias se pueden poner en lenguaje de tautologías (ejercicio 1.2.3)
 $P, P \rightarrow Q \therefore Q$ se puede expresar en la forma “tautológica” $((P \rightarrow Q) \wedge P) \implies Q$

Sabores. Por supuesto, las leyes aparecen en distintos sabores. Por ejemplo

Modus ponens: $P, P \rightarrow Q \therefore Q$
 $\neg P, \neg P \rightarrow Q \therefore Q$
 $(P \wedge R), (P \wedge R) \rightarrow Q \therefore Q$

Ley de casos: $P \rightarrow Q, \neg P \rightarrow R \therefore Q \vee R$
 $\neg P \vee Q, P \vee R \therefore Q \vee R$ (por ID)
 $P \rightarrow \neg Q, \neg P \rightarrow R \therefore \neg Q \vee R$
 $P \rightarrow (Q \vee R), \neg P \rightarrow R \therefore Q \vee R$ (por idempotencia)

Ejemplo 1.26

Demuestre: $R \vee (S \wedge T) \quad \therefore R \vee S$

Solución:

1. $R \vee (S \wedge T) \quad \equiv \quad (R \vee S) \wedge (R \vee T)$ Distributividad
2. $(R \vee S) \wedge (R \vee T) \quad \therefore \quad R \vee S$ Simplificación

Ejemplo 1.27

Demuestre

$$\boxed{1} \quad (M \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg Q),$$

$$\boxed{2} \quad Q$$

$$\therefore M$$

Solución: Podemos poner las premisas en términos de “implicaciones” y usar Ley de Casos.

Premisas

$$(1) \quad (M \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg Q)$$

$$(2) \quad Q$$

Ley

Aplicando leyes

$$(3) \quad (M \vee R) \wedge (\neg R \vee \neg Q) \quad \equiv \quad \neg R \rightarrow M, R \rightarrow \neg Q \quad \text{ID, Adjunción}$$

$$(4) \quad \neg R \rightarrow M, R \rightarrow \neg Q \quad \therefore \quad M \vee \neg Q \quad \text{Ley de casos}$$

$$(5) \quad M \vee \neg Q, Q \quad \therefore \quad M \quad \text{Silogismo disyuntivo}$$

Ejemplo 1.28

Demuestre

$$\boxed{1} \quad (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S)$$

$$\boxed{2} \quad R \rightarrow T$$

$$\boxed{3} \quad \neg T$$

$$\therefore P$$

Solución: Plan: Como queremos obtener P , la idea es ver si podemos inferir $\neg(R \wedge S)$ para obtener, por MT, $\neg(\neg P \vee \neg Q) \equiv P \wedge Q$ en la primera premisa y concluir lo que necesitamos.

Primero usamos MT en (2) y (3): $R \rightarrow T, \neg T \quad \therefore \neg R,$
 para negar $(R \wedge S)$ usamos adición y DM: $\neg R \quad \therefore \neg R \vee \neg S \equiv \neg(R \wedge S),$
 tenemos, usando MT, $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S), \neg(R \wedge S) \quad \therefore \neg(\neg P \vee \neg Q)$
 usamos DN, DM y simplificación: $\neg(\neg P \vee \neg Q) \equiv P \wedge Q, \quad \therefore P$

Ejemplo 1.29

Demuestre $P \rightarrow Q, Q \rightarrow (R \wedge S), \neg R \vee \neg T \vee U, P \wedge T \quad \therefore U.$

Solución: Plan: Como $\neg R \vee \neg T \vee U \equiv \neg(R \wedge T) \vee U$, bastaría inferir $R \wedge T$ para que, usando SD, concluir U .

Primero usamos SH.: $P \rightarrow Q, Q \rightarrow (R \wedge S) \quad \therefore R \wedge S$
 Usando simplificación, adjunción: $R \wedge S, P \wedge T \quad \therefore R \wedge T$
 Como $\neg R \vee \neg T \vee U \equiv \neg(R \wedge T) \vee U,$
 entonces, por SD: $R \wedge T, \neg(R \wedge T) \vee U \quad \therefore U$

Ejemplo 1.30

Demuestre $P \rightarrow Q, \neg R \rightarrow (S \rightarrow T), R \vee P \vee S, \neg R \quad \therefore Q \vee T$

Solución: El plan es “extraer” $P \rightarrow Q$ y $S \rightarrow T$ y aplicar “dilema constructivo” para concluir $Q \vee T$.

$R \vee (P \vee S), \neg R \quad \therefore P \vee S$ Silogismo Disyuntivo
 $\neg R, \neg R \rightarrow (S \rightarrow T) \quad \therefore S \rightarrow T$ Modus ponens
 $S \rightarrow T, P \rightarrow Q, P \vee S \quad \therefore T \vee Q$ Dilema constructivo

Ejemplo 1.31

Demostrar la validez del siguiente argumento utilizando las reglas de inferencia y/o leyes de la lógica. Indique en cada paso la ley o la regla que utiliza.

$$\begin{array}{l}
 1.) \quad \neg P \rightarrow Q \\
 2.) \quad Q \rightarrow R \\
 3.) \quad (P \wedge S) \rightarrow (\neg P \vee T) \\
 4.) \quad \neg R \\
 5.) \quad \neg Q \rightarrow (S \wedge M) \\
 \hline
 \therefore Q \vee T
 \end{array}$$

Solución:

Premisas	Inferencias	Leyes y/o reglas
1.) $\neg P \rightarrow Q$	6.) $Q \rightarrow R, \neg R$	$\therefore \neg Q$ (MT)
2.) $Q \rightarrow R$	7.) $\neg Q \rightarrow (S \wedge M), \neg Q$	$\therefore (S \wedge M)$ (MP)
3.) $(P \wedge S) \rightarrow (\neg P \vee T)$	8.) $\neg P \rightarrow Q, \neg Q$	$\therefore P$ (MT)
4.) $\neg R$	9.) <i>De 7.) y 8.)</i>	$\therefore P \wedge S$ (S)
5.) $\neg Q \rightarrow (S \wedge M)$	10.) <i>De 9.) y 3.)</i>	$\therefore P \rightarrow T$ (MP, ID)
	11.) $\neg P \rightarrow Q, P \rightarrow T$	$\therefore Q \vee T$ (LC)

Inferencias con lenguaje natural: En los ejemplos que los que se involucra el lenguaje natural, definitivamente estamos abusando de lo que es una proposición, porque asumimos implícitamente un contexto. Estos ejemplos, y algunos ejercicios en esta sección, están basados en la opinión de que “Asumimos que en lenguaje natural, las proposiciones siempre tienen que ser evaluadas como una expresión actual, es decir, incluyendo el tiempo de la expresión, el lugar de la misma, el orador, el destinatario, etc. Por lo general, a la matemática no le importa esta *dependencia del contexto* y asume automáticamente que tales afirmaciones sólo pueden ser válidas trivialmente en un cierto tiempo y lugar...” [10]

Ejemplo 1.32

Establezca la validez del siguiente razonamiento:

No ocurre que $a + b = 7$ y b sea positivo.

Si b no es positivo, entonces $2a - 3 < 0$.

Si el problema no tiene solución única, entonces no ocurre que $a + b = 7$ o que b sea positivo.

Por tanto $a + b \neq 7$.

Solución: Convertimos el razonamiento a forma simbólica

Forma simbólica de las proposiciones	Razonamiento (y equivalencias)
$P: a + b = 7$	(1.) $\neg(P \wedge Q) \equiv Q \rightarrow \neg P$
$Q: b$ es positivo	(2.) $\neg Q \rightarrow R \equiv \neg R \rightarrow Q$
$R: 2a - 3 < 0$	(3.) $S \rightarrow \neg R$
$S: \text{el problema tiene solución única}$	(4.) $\neg S \rightarrow \neg(P \vee \neg Q)$
$\therefore \neg P: a + b \neq 7$	$\therefore \neg P$

Demostración de la inferencia:

De (3.) y (2.) $\therefore S \rightarrow Q$ por SH

Con (1.) tenemos $S \rightarrow Q, Q \rightarrow \neg P \therefore S \rightarrow \neg P$ por SH.

Con (4.): $S \rightarrow \neg P$ y $\neg S \rightarrow \neg(P \vee \neg Q) \therefore \neg P \vee \neg(P \vee \neg Q)$ por Ley de casos.

Usando DM $\neg P \vee \neg(P \vee \neg Q) \equiv \neg P \vee (\neg P \wedge Q) \therefore \neg P$ por Absorción.

Ejemplo 1.33 (En lenguaje natural, se asume un contexto).

Establezca la validez del siguiente razonamiento

Si estudio C entonces debo matricular un curso de M.

No estudio mucho o no tengo tiempo para leer o necesito vacaciones.

Estudio C y tengo tiempo para leer

Si matriculo un curso de M, entonces debo estudiar mucho y no puedo ir al estadio.

Por lo tanto necesito vacaciones.

Solución: Convertimos el razonamiento a forma simbólica

Forma simbólica de las proposiciones	Razonamiento (y equivalencias)
$C: \text{estudio C}$	(1.) $C \rightarrow M$
$M: \text{matriculo un curso de M}$	(2.) $\neg E \vee \neg L \vee V$
$E: \text{estudio mucho}$	(3.) $C \wedge L$
$L: \text{tengo tiempo para leer}$	(4.) $M \rightarrow (E \wedge \neg S)$
$V: \text{necesito vacaciones}$	$\therefore V$
$S: \text{voy al estadio}$	$\therefore V$

La demostración de la inferencia es un ejercicio.

Ejercicios

R 1.5.1 Demuestre las conclusiones a partir de las proposiciones dadas. Debe indicar las reglas y leyes que utiliza.

$$1) \quad \boxed{1} \quad (Q \wedge P) \vee (R \wedge S), \\ \quad \quad \quad \therefore Q \vee R$$

$$2) \quad \boxed{1} \quad Q \vee \neg S, \\ \quad \quad \boxed{2} \quad H \rightarrow S, \\ \quad \quad \boxed{3} \quad P \rightarrow (R \wedge S), \\ \quad \quad \boxed{4} \quad \neg P \rightarrow H \\ \quad \quad \quad \therefore \neg (T \wedge \neg Q)$$

$$3) \quad \boxed{1} \quad P \vee Q, \\ \quad \quad \boxed{2} \quad \neg R \vee \neg P, \\ \quad \quad \boxed{3} \quad S \rightarrow R, \\ \quad \quad \boxed{4} \quad T \vee S, \\ \quad \quad \boxed{5} \quad R \rightarrow \neg Q \\ \quad \quad \quad \therefore T$$

$$4) \quad \boxed{1} \quad (R \vee Q) \rightarrow \neg T, \\ \quad \quad \boxed{2} \quad \neg Q \vee R, \\ \quad \quad \boxed{3} \quad P \vee Q, \\ \quad \quad \boxed{4} \quad P \rightarrow (R \wedge S) \\ \quad \quad \quad \therefore \neg (\neg U \wedge T)$$

$$5) \quad \boxed{1} \quad Q \rightarrow S, \\ \quad \quad \boxed{2} \quad \neg P \rightarrow Q, \\ \quad \quad \boxed{3} \quad P \rightarrow (R \wedge S), \\ \quad \quad \boxed{4} \quad \neg A \vee \neg S; \\ \quad \quad \therefore T \rightarrow \neg A.$$

$$6) \quad \boxed{1} \quad P \wedge \neg R, \\ \quad \quad \boxed{2} \quad (\neg R \vee S) \rightarrow (P \rightarrow Q), \\ \quad \quad \boxed{3} \quad (Q \vee T) \rightarrow (S \vee R)$$

$$\therefore T \rightarrow S$$

$$7) \boxed{1} \neg (P \wedge Q),$$

$$\boxed{2} \neg Q \rightarrow R,$$

$$\boxed{3} S \rightarrow \neg R,$$

$$\boxed{4} \neg S \rightarrow \neg (P \vee \neg Q)$$

$$\therefore P \rightarrow T$$

$$8) \boxed{1} (Q \wedge R) \rightarrow \neg P,$$

$$\boxed{2} \neg Q \rightarrow S,$$

$$\boxed{3} R \vee T,$$

$$\boxed{4} P,$$

$$\boxed{5} U \rightarrow (\neg S \wedge \neg T)$$

$$\therefore \neg U$$

$$9) \boxed{1} P \rightarrow S,$$

$$\boxed{2} (Q \vee R) \rightarrow P,$$

$$\boxed{3} Q \wedge T,$$

$$\boxed{4} \neg S \vee N$$

$$\therefore M \rightarrow N$$

$$10) \boxed{1} (\neg P \vee Q) \rightarrow R,$$

$$\boxed{2} R \rightarrow (S \vee T),$$

$$\boxed{3} \neg S \wedge \neg U,$$

$$\boxed{4} \neg U \rightarrow \neg T$$

$$\therefore \neg P \rightarrow \neg A$$

1.5.2 Utilice las reglas de inferencias y las leyes de la lógica para demostrar p a partir de las premisas $(p \rightarrow q) \rightarrow (s \wedge t)$, $\neg (s \vee u)$.

1.5.3 Utilice las reglas de inferencias y las leyes de la lógica para demostrar Q a partir de las premisas $(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg R \wedge W)$, $\neg R \rightarrow \neg T$, $T \vee S$, $\neg S$

1.5.4 Demostrar la validez del siguiente argumento utilizando las reglas de inferencia y/o leyes de la lógica. Indique en cada paso la ley o la regla que utiliza.

$$\neg P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, (P \wedge S) \rightarrow (\neg P \vee T), \neg R \wedge S \wedge M \quad \therefore Q \vee T$$

1.5.5 Demostrar $\neg A \vee \neg C$ a partir de $A \rightarrow B$, $C \rightarrow D$, $(\neg B \vee \neg D) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

1.5.6 Demuestre que $\neg(S \wedge \neg Q)$ a partir de $\neg T$, $\neg P \rightarrow \neg S$, y $\neg P \vee T$

1.5.7 Demuestre que $R \rightarrow \neg Q$ a partir de $\neg(R \wedge S)$ y $\neg S \rightarrow \neg Q$

1.5.8 Demuestre que $\neg(S \vee \neg Q)$ a partir de $\neg S \rightarrow Q$, $\neg(T \wedge R)$, $S \rightarrow T \wedge R$.

1.5.9 Demuestre P a partir de $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S)$, $R \rightarrow T$, $\neg T$.

1.5.10 Demuestre U a partir de $P \wedge T$, $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow (R \wedge S)$, $\neg R \vee \neg T \vee U$.

1.5.11 Por medio de las reglas de inferencia pruebe $\neg T$ a partir de $P \rightarrow \neg Q$, $Q \vee \neg R$, $P \wedge S$, $T \rightarrow R \wedge S$.

1.5.12 Demuestre la validez del argumento $\neg T \vee U$ a partir de las siguientes hipótesis y utilizando las reglas de inferencia y leyes de la lógica. Indique la ley o la inferencia que utiliza en cada paso.

- $R \wedge Q \rightarrow \neg T$
- $\neg(\neg P \vee R)$
- $\neg(P \wedge \neg Q)$
- $\neg P \vee (R \wedge S)$

1.5.13 Simbolice las proposiciones involucradas y demuestre la validez del argumento. (Debe indicar las leyes y reglas que utiliza).

- No ocurre que, $x > 6$ y b sea positivo. Si b no es positivo entonces $2a - 3 = c$. Si el problema tiene solución única entonces $2a - 3 \neq c$. Si el problema no tiene solución única, entonces, no ocurre que, $x > 6$ o b no es positivo. Por lo tanto, se concluye que $x \leq 6$ o Costa Rica es campeón mundial.
- No ocurre que, $a + b = 7$ y $b > 0$. Si $a + b \neq 7$ entonces $2a - 3 < 0$. Si b no es positivo entonces $2a - 3 < 0$. Si el problema tiene solución entonces $2a - 3 \geq 0$. Si el problema no tiene solución, entonces, no ocurre que, $a + b = 7$ o $b \leq 0$. Por lo tanto, se concluye que $a + b \neq 7$ o 3211 es divisible por 3.

- 3) Si Luis va al partido de fútbol, entonces Laura se irá a nadar. Si Manuel ve televisión toda la noche, entonces Carolina se irá a nadar. Si Laura va a nadar o Carolina va a nadar, Jorge las acompañará. De hecho Jorge no las acompañará. En consecuencia, **no ocurre que:** Luis fue al partido de fútbol o Manuel ve televisión toda la noche.
- 4) Si José gana la carrera, entonces Pedro fue el segundo o Ramón fue el segundo. Si Pedro fue el segundo, entonces José no ganó la carrera. Si Carlos fue el segundo, entonces Ramón no fue el segundo. José ganó la carrera. Por lo tanto, Carlos no fue el segundo.
- 5) Si Juan le apostó a la Liga, entonces se gastó el dinero. Si Juan se gastó el dinero, entonces no alcanza para comida y su esposa pide que trabaje más. Si no alcanza para comida, entonces los niños no comen o la esposa está enojada. Juan le apostó a la Liga. Por lo tanto, si los niños comen, entonces su esposa está enojada.
- 6) Si aplico para la beca a España, entonces no matriculo el curso de verano. Matriculo el curso de verano o me voy de vacaciones. Resulta que no me voy de vacaciones. Si matriculo el curso de verano y compro un piano, entonces aplico para la beca a España. Por lo tanto, no compro un piano.
- 7) Si Gadafi renuncia o el precio del petróleo no aumenta, entonces no se bombardea Trípoli y se restituye la paz. Si no se bombardea Trípoli, entonces no hay problemas políticos en Libia. De hecho hay problemas políticos en Libia. Por lo tanto, el precio del petróleo aumenta.
- 8) Si no se aprueba el convenio con la UE o no se disminuyen los aranceles, entonces la economía empeorará y la inflación se mantendrá. Si la economía empeora, el desempleo aumenta. Pero el desempleo no aumenta. Por lo tanto, se aprueba el convenio con la UE.
- 9) Si voy a la montaña, entonces iré a caminar y montaré a caballo. Si no voy a la montaña, entonces leeré un libro. Si me duele la espalda, no montaré a caballo. No me duele la espalda y no montaré a caballo. Por lo tanto, leeré un libro.
- 10) Costa Rica clasifica al mundial o bien Jamaica clasifica. Si Honduras no clasifica o Jamaica clasifica, entonces México clasifica. México no clasifica. En consecuencia, Costa Rica clasifica y Honduras también.
- 11) Si Pedro está involucrado en el robo, entonces Carlos también está involucrado y Julia no lo está. Si Carlos o Pedro están involucrados, entonces Julia también lo está. Pedro está involucrado en el robo. Por lo tanto, ni Carlos ni Julia están involucrados en el robo del cheque.

1.6 Epílogo

¿Podríamos establecer el valor de verdad de cualquier proposición que involucre solo números enteros y las operaciones aritméticas usuales?

El llamado “último teorema de Fermat” dice: Para todo entero ≥ 3 , no existen tres enteros x, y y z tal que $x^n + y^n = z^n$. Este problema había estado abierto durante más de 350 años. Fue demostrado por Andrew Wildes (profesor de matemáticas en la Universidad de Princeton) en 1995.

La “Conjetura de Goldbach” dice: Todo entero $n \geq 2$ es la suma de dos números primos. Por ejemplo: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, ..., $20 = 3 + 17$, $22 = 3 + 19 = 11 + 11$, etc. Se ha verificado que esta conjetura es verdadera para enteros hasta 1.6×10^{18} ... pero no para todo $n \geq 2$!. El editor británico Tony Faber ofreció un premio de \$ 1000000 si se presentaba una prueba de esta conjetura antes de abril de 2002. El premio no fue reclamado y esta todavía hoy sin resolver.

¿Sera factible una prueba finita de este problema?²

El famoso matemático David Hilbert imaginó en 1900, que se podía establecer el valor de verdad de todas las proposiciones que implican sólo números enteros y operaciones aritméticas ³ Estas proposiciones incluirían las proposiciones de “el último teorema de Fermat” y la conjetura de Goldbach (y muchos otros problemas difíciles sin resolver). Pero, ... el “teorema de incompletitud de Gödel” (1931) dice que esto es una misión imposible!. Este teorema dice, que no hay un sistema de axiomas que describa totalmente a los números naturales, por lo tanto habrá enunciados en teoría de números que pueden ser intuitivamente correctos, pero que el sistema de axiomas que tenemos actualmente no permita probar su veracidad: Son enunciados indecidibles. No se sabe si el teorema de Golbach será uno de estos enunciados. En el sentido del teorema de Gödel, podría pasar que este teorema no tiene una “prueba finita” a partir de los axiomas usuales de la aritmética.

Gregory Chaitin (1947–) produjo enunciados indecidibles en “teoría algorítmica de la información” y demostró otro teorema de la incompletitud en ese contexto. Afirma que sus resultados en lógica matemática y en teoría de la información algorítmica muestran que hay hechos matemáticos que son ciertos sin razón, por accidente. Son hechos matemáticos aleatorios. Chaitin propone que los matemáticos deberían abandonar toda esperanza de probarlos y adoptar una metodología cuasi-empírica [9].

²La “conjetura débil de Goldbach” si ha sido probada en 2013, por Harald Helfgott. Esta conjetura afirma que “cada número impar mayor que 5 puede expresarse como la suma de tres primos (un primo puede ser utilizado más de una vez en la misma suma).

³“Hilbert had a two-pronged proposal to save the day. First, he said, let’s go all the way with the axiomatic method and with mathematical formalism. Let’s eliminate from mathematics all the uncertainties and ambiguities of natural languages and of intuitive reasoning. Let’s create an artificial language for doing mathematics in which the rules of the game are so precise, so complete, that there is absolutely no uncertainty whether a proof is correct. In fact, he said, it should be completely mechanical to check whether a proof obeys the rules, because these rules should be completely syntactic or structural, they should not depend on the semantics or the meaning of mathematical assertions! In other words – words that Hilbert didn’t use, but that we can use now– there should be a proof-checking algorithm, a computer program for checking whether or not a proof is correct.” [9].

Teoría intuitiva de conjuntos

“Later generations will regard set theory as a disease from which one has recovered!”. **H. Poincaré**.

“No one shall expel us from the paradise which Cantor has created for us!”. **D. Hilbert**.

2.1 Introducción

Intuitivamente, un conjunto es una colección de objetos. Aquí presentamos una “teoría de conjuntos” de manera intuitiva e informal sin entrar en terrenos donde aparecen las paradojas (no abordamos los problemas de admitir “la existencia de un conjunto de todos los conjuntos” por ejemplo, ni como evitar las paradojas en la teoría). Lo que vamos a ver es suficiente para el uso diario en las matemáticas básicas. Los conjuntos, o colecciones de objetos, se denotan con letras mayúsculas A, B, C, \dots . Por ejemplo, $A = \{a, b, c\}$ es un conjunto de tres elementos, a saber, a, b y c .

- “ $x \in A$ ” se lee “ x es un elemento de A .”
- \emptyset o $\{ \}$ denota el conjunto vacío (sin elementos)
- $A \subseteq B$ denota que A está incluido o es subconjunto de B .

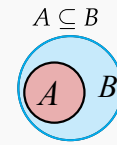
En teoría (intuitiva) de conjuntos tenemos también, un conjunto de leyes similares a los de la lógica pero... los métodos de demostración son distintos. Para probar teoremas en teoría de conjuntos usamos las definiciones que siguen más abajo y estas leyes (las de teoría de conjuntos).

Debemos detenernos y observar que los métodos de prueba en esta teoría ya no es como los métodos de prueba que vimos en el capítulo anterior: Ahora razonamos con las leyes, las definiciones y *el significado* de los enunciados. Debemos detenernos y aprender los métodos de prueba en esta teoría.

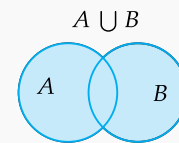
Definición 2.1**Diagrama de Venn**• **Inclusión**

$$A \subseteq B \iff (\forall x \in A \implies x \in B)$$

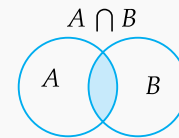
En particular $\emptyset \subseteq A$

• **Igualdad:** $A = B \iff (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ • **Unión**

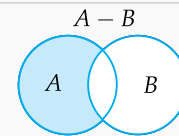
$$A \cup B = \{x \text{ tal que } x \in A \vee x \in B\}$$

• **Intersección**

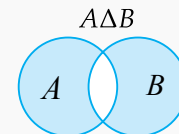
$$A \cap B = \{x \text{ tal que } x \in A \wedge x \in B\}$$

• **Diferencia**

$$A - B = \{x \text{ tal que } x \in A \wedge x \notin B\}$$

• **Diferencia simétrica**

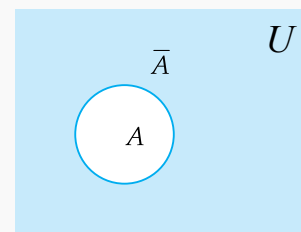
$$A \Delta B = \{x \text{ tal que } x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$$

• **Complemento**

\mathcal{U} es un “conjunto universal” (llamado “universo del discurso”), es decir, un conjunto formado por todos los objetos del contexto (por ejemplo podría ser $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ o $\mathcal{U} =$ letras del alfabeto, etc.). El complemento de A respecto a \mathcal{U} es

$$\bar{A} = \{x \text{ tal que } x \in \mathcal{U} - A\}.$$

En particular $\overline{\bar{A}} = A$ y $\bar{\mathcal{U}} = \emptyset$

• **Conjuntos Disjuntos:** Dos conjuntos A y B son disjuntos si $A \cap B = \emptyset$ • **Producto cartesiano:** $A \times B = \{(a, b) \text{ tal que } a \in A \wedge b \in B\}$

- Conjunto de partes de A : $\mathcal{P}(A) = \{Q \text{ tal que } Q \subseteq A\}$. Observe que $Q \in \mathcal{P}(A) \iff Q \subseteq A$

N

Es útil conocer algunas “negaciones”. Por ejemplo, si $x \notin A \cup B \implies x \in \overline{A \cup B}$, pero también, a veces es necesario ir por otro camino:

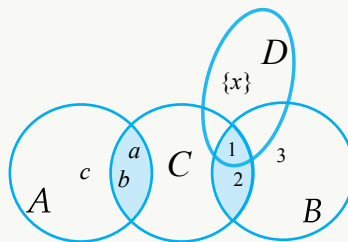
$$\text{a.) } x \notin A \cup B \equiv \neg [x \in A \cup B] \equiv \neg [x \in A \vee x \in B] \equiv x \notin A \wedge x \notin B$$

$$\text{b.) } x \notin A \cap B \equiv \neg [x \in A \cap B] \equiv \neg [x \in A \wedge x \in B] \equiv x \notin A \vee x \notin B$$

$$\text{c.) } x \notin A - B \equiv \neg [x \in A - B] \equiv \neg [x \in A \wedge x \notin B] \equiv x \notin A \vee x \in B$$

Ejemplo 2.1

Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{a, 1, 2, b\}$ y $D = \{\{x\}, 1\}$



- $A \cup C = \{a, b, c, 1, 2\}$ (los elementos repetidos se toman en cuenta solo una vez)
- $S = \{a, b\} \subseteq A$
- $A - B = A$ y $A - C = \{c\}$
- $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$. Observe que $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$ y que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
- $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, B, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

f.) Si $Q = \{1,2\}$, entonces $Q \in \mathcal{P}(B)$ pues $Q \subseteq B$ y $Q \notin \mathcal{P}(A)$ pues $Q \not\subseteq A$

g.) $S = \{a,b,1,2\} \subseteq A \cup B \implies S \in \mathcal{P}(A \cup B)$ pero $S \notin \mathcal{P}(A)$ y $S \notin \mathcal{P}(B)$

h.) $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \{A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$. Observe que $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ pero $\emptyset \notin \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$

i.) El producto cartesiano se puede calcular con una tabla. Como convenio, en el producto $A \times B$, las filas son los elementos de A y las columnas, los elementos de B .

$A \times B$	1	2	3
a	$(a,1)$	$(a,2)$	$(a,3)$
b	$(b,1)$	$(b,2)$	$(b,3)$
c	$(c,1)$	$(c,2)$	$(c,3)$

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3), (c,1), (c,2), (c,3)\}$$

j.) $D \times D = \{(\{x\}, \{x\}), (\{x\}, 1), (1, \{x\}), (1, 1)\}$

k.) $\mathcal{P}(\{(1,1), (1,2)\}) = \{\emptyset, \{(1,1), (1,2)\}, \{(1,1)\}, \{(1,2)\}\}$

Ejemplo 2.2

Sea $D = \{\{x\}, 1\}$ y $R = \{x, \{x\}, 1\}$.

a.) $\{\{x\}\} \subseteq D$ pues $\{x\} \in D$

b.) $\{x\} \subseteq R$ pues $x \in R$ pero $\{x\} \not\subseteq D$ pues $x \notin D$

c.) $\{x, 1\} \subseteq R$ pues $x, 1 \in R$ pero $\{x, 1\} \not\subseteq D$ pues $x \notin D$

d.) $\mathcal{P}(D) = \{\emptyset, D, \{\{x\}\}, \{1\}\}$

e.) $\mathcal{P}(R) = \{\emptyset, R, \{x\}, \{\{x\}\}, \{1\}, \{x, \{x\}\}, \{x, 1\}, \{\{x\}, 1\}\}$

Ejemplo 2.3

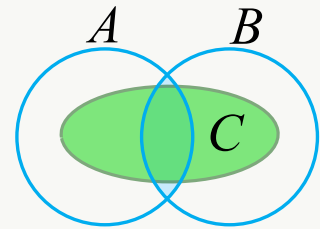
Muestre, con un contraejemplo, que la siguiente afirmaciones son falsas.

a.) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

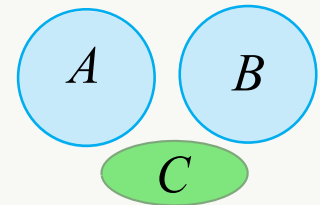
b.) $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq A \cup B$

Demostración:

a.) Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{a, 1, 2, b\}$.
Entonces $C \subseteq A \cup B \implies C \in \mathcal{P}(A \cup B)$
pero $C \notin \mathcal{P}(A)$ y $C \notin \mathcal{P}(B)$, es decir,
 $C \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$



b.) Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ y $C = \{\#, \%\}$. En-
tonces $(A \cup C) \cap (B \cup C) = C$ pero $C \not\subseteq A \cup B$.



Ejercicios

Operaciones con conjuntos y cuantificadores

2.1.1 Sea $A = \{0, 3, 6, 9\}$ y $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

1) $(\forall y \in A)(\exists x \in B)[y = 3x]$

2) $(\exists x \in B)(\forall y \in A) \left[\frac{y}{x} \in B \right]$

2.1.2 Si $A = \{1, 3, 7\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ y $C = \{5, 12, 14\}$, determine el valor de verdad de las proposiciones:

1) $\forall x[x \in B \cap C \implies (x+2) \in A]$

2) $(\forall x \in A)(\exists y \in B)[xy \in C]$

3) $(\exists x \in A)(\forall y \in B)[x+y \in C]$

2.1.3 Considere el conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y las proposiciones abiertas:

a.) $P(x)$: $x+1$ es un número primo;

b.) $Q(x)$: $x^2 + x$ es un número impar.

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1) $\forall x \in \mathbb{N}[x \in A \implies x < 9] \wedge \exists x \in \mathbb{N}[x \notin A \wedge P(2x)]$

$$2) \exists x \in A [P(2x - 1) \longleftrightarrow Q(x + 1)]$$

$$3) (\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})[x \in A \implies (Q(x) \vee P(x + y))]$$

R 2.1.4 Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\emptyset\}$ y $C = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{2\}\}$, determine el valor de verdad de las proposiciones (justifique cuando sea posible):

$$1) \exists x [x \in C \implies x \subset A]$$

$$2) \forall x [x \in A \implies \{x\} \in C]$$

$$3) \neg \forall x [x \in B \implies x = \emptyset]$$

R 2.1.5 Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq x < 5\}$ y las proposiciones abiertas:

a.) $P(x) : x + 1$ es un número par;

b.) $Q(x) : 3x + 1$ es un número primo.

Determine el valor de verdad de las proposiciones:

$$1) (\exists x \in A)(\forall y \in A) \left[\frac{y}{x-3} \in A \right]$$

$$2) (\exists y \in A)[P(y) \wedge Q(y)]$$

R 2.1.6 Si $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < 1\}$. Determine el valor de verdad de las proposiciones:

$$1) (\forall x \in A)(\exists y \in B)[xy \in B]$$

$$2) (\exists x \in A)(\forall y \in B)[xy + 2x = 2y + 4]$$

$$3) (\forall x \in A)(\exists y \in B) \left[\frac{1}{y} > x \right]$$

R 2.1.7 Sean $A = \{3, 4, 6, 7\}$, $B = \{\emptyset\}$ y $C = \{\{6\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 7\}\}$. Determine el valor de verdad de las proposiciones:

$$1) \forall x [x \in C \implies x \subseteq A]$$

$$2) \forall x [x \in 2^B \implies x \in B]$$

$$3) \neg \forall x [x \in A \implies \{x\} \notin C]$$

R 2.1.8 Sea $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}, 1\}\}$ y $B = \{\{a\}, 1, a, \{\{a, 1\}, a\}, \{\{a\}, 1\}\}$. Determine si la siguiente proposición es falsa o verdadera:

$$(\forall x \in A) (\exists y \in A \Delta B) [\{x, y\} \in A \cup B]$$

2.1.9 Sean $A = \{1, 3, 5, 8, 9\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5, 9\}$. Considere la proposición abierta:

$$P(x) : x \text{ es par}$$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando cada respuesta:

- $(\exists x \in A \cup B) [P(x)]$
- $(\forall x \in \mathbb{N}) [x \in A \cap B \implies P(x+1)]$
- $(\exists x \in A)(\forall y \in A \cap B) [P(x+y)]$

2.1.10 En una escuela se tiene un total de 2300 estudiantes de los cuales 200 practican fútbol, atletismo y ciclismo; 550 practican fútbol y atletismo; 400 practican atletismo y ciclismo; 300 practican únicamente ciclismo; 1000 practican atletismo y 1400 practican fútbol. Además, se sabe que los que no practican ningún deporte son una tercera parte de los que únicamente practican fútbol y ciclismo. Determine el número de estudiantes que practican:

- únicamente fútbol;
- el número de estudiantes que practican ciclismo.

Operaciones con conjuntos

2.1.11 Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera, utilizando diagramas de Venn, verifique la validez de la proposición: $A \cap B \cap C \subseteq A \Delta (B \Delta C)$.

2.1.12 Si $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ y $C = \{5, 6, 7\}$, con $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ como el conjunto universo, calcule:

- $\overline{A \Delta B} \cap C$
- $(A \cap B) \times (\mathcal{P}(B - C))$

2.1.13 Si $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ y $C = \{3, 4, 5\}$, determine $[(A \Delta B) \times C] \cap [A \times (B \cap C)]$.

2.1.14 Si $A = \{a, b\}$, $B = \{b, c, d\}$ y $C = \{a, d\}$, donde el conjunto universo es $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f\}$. Calcule:

- $(A \cup C) \Delta B$
- $\mathcal{P}(\overline{A \cap B})$
- $(C \times B) - (A \times C)$

2.1.15 Si $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d, e, f\}$ y $C = \{c, d, f\}$, donde el conjunto universo es $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f\}$. Calcule:

1) $C - \overline{B - A}$

2) $\overline{(A \Delta B) \cup C}$

R 2.1.16 Si $A = \{a, c, d, e, g\}$, $B = \{b, c, e, f\}$ y $C = \{c, d, e\}$, donde el conjunto universo es $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Calcule:

1) $[A - (B \cup C)] \cap \overline{A \Delta C}$

2) $\mathcal{P}(C - B) \times \overline{A \cup C}$

3) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(C - A))$

R 2.1.17 Si $A = \{a, b, g\}$, $B = \{b, d, e, g\}$ y $C = \{a, b, d, f, g\}$, donde el conjunto universo es $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Calcule:

1) $(A \Delta C) \cap \overline{B - A}$

2) $\mathcal{P}(C - B) \times (A \cap B)$

R 2.1.18 Si $\mathcal{U} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ es el conjunto universo, donde existen los conjuntos $A = \{a, d, e\}$ y $B = \{b, c, d\}$, determine:

1) $\overline{(A \cup B)} \times (\overline{A} \cap B)$

2) $\mathcal{P}(A \cap \overline{B})$

R 2.1.19 Sean $A = \{w\}$ y $B = \{5, 2\}$, donde el conjunto universo es $\mathcal{U} = \{2, 5, w\}$. Calcule $\mathcal{P}(A \times B)$

R 2.1.20 Si $A = \{\emptyset, 1, \{1\}, 2, \{1, 2\}\}$ y $B = \{\emptyset, 2, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}\}$, donde el conjunto universo es $\mathcal{U} = \{\emptyset, 1, 2, 3, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. Calcule:

1) $(A - B) \cup (A \Delta B)$

2) $(A \cap B) \times \overline{A \cup B}$

3) $\mathcal{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$

4) Dos elementos que pertenezcan al conjunto $A \times \mathcal{P}(A \cup B)$

R 2.1.21 Si $A = \{\{\emptyset\}, 1, \{2\}, \{3\}\}$ y $B = \{3, \{2\}\}$ calcule:

1) $A \cap B$

2) $\mathcal{P}(A - B)$

3) $B \times A$

4) $A \Delta B$

R 2.1.22 Si $A = \{\emptyset, 1, \{\emptyset\}, 2, \{1, 2\}\}$ y $B = \{\emptyset, 2, \{1\}, \{3\}, \{\emptyset\}\}$, donde el conjunto universo es $\mathcal{U} = \{\emptyset, 1, 2, 3, \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$. Calcule:

1) $(B - A) \times (A \cap B)$

2) $\mathcal{P}(A - \overline{B})$

R 2.1.23 Sean A, B y C son conjuntos del universo $\mathcal{U} = \{\emptyset, 1, 2, 3, \{3\}, \{2, 4\}\}$ para los cuales se conoce lo siguiente:

a.) $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{3\}\}, \{\emptyset, \{3\}\}\};$

b.) $B \times C = \{(\emptyset, 2), (2, 2), (\emptyset, \{2, 4\}), (2, \{2, 4\})\}.$

1) Determine por extensión los conjuntos A, B y C .2) Determine $(A \cap B) \Delta C$.3) Determine $\mathcal{P}(\overline{A \cup C})$.

R 2.1.24 Sea $A = \{a, b\}$. Determine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

R 2.1.25 Sea $D = \{\emptyset, \{a, b\}\}$. Determine $D \times D$

R 2.1.26 Sea $Q = \{\emptyset, a, b\}$. Calcule $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(Q \times Q))|$

R 2.1.27 Sean $A = \{1, 2, 3, d\}$, $B = \{1, 2, 3, e\}$ y $C = \{2\}$. Determine por extensión los conjuntos

a.) $(A \Delta B) \times \mathcal{P}(C)$.

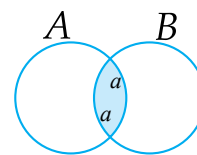
b.) $\overline{A \cap C} - \overline{B} \times A$

c.) $\mathcal{P}(B - A) \cap \mathcal{P}(A - B)$

2.2 Cardinalidad

Sea A un conjunto finito (con una cantidad finita de elementos). La cardinalidad del conjunto A se denota $|A|$ y es la cantidad de elementos del conjunto.

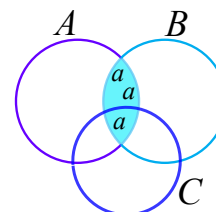
1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



2) Principio de inclusión-exclusión (caso particular)

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Los elementos que están en $A \cap B \cap C$ se cuentan tres veces, pero solo debe eliminarse dos veces.



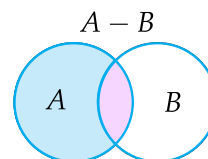
3) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Por ejemplo si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$, la cardinalidad de $A \times B$ es similar a calcular “la cantidad de bloques de un rectángulo” de lados 4 y 3

$A \times B$	1	2	3
a	$(a, 1)$	$(a, 2)$	$(a, 3)$
b	$(b, 1)$	$(b, 2)$	$(b, 3)$
c	$(c, 1)$	$(c, 2)$	$(c, 3)$
d	$(d, 1)$	$(d, 2)$	$(d, 3)$

4) $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

Contamos los elementos de A pero debemos sustraer los elementos que están en la intersección con B



5) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$

El teorema del binomio dice que

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n y^0 + \binom{n}{1}x^{n-1}y^1 + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n}x^0 y^n.$$

En el caso de conjuntos, si $|A| = n$, el coeficiente binomial $\binom{n}{k}$ cuenta la cantidad subconjuntos de A con k elementos. Por tanto si ponemos $x = 1$ y $y = 1$ en el teorema del binomio, obtenemos

$$\mathcal{P}(A) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^{|A|}$$

Ejemplo 2.4

Sea $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, 1, 2\}$ y $C = \{a, 1, 3, 4\}$ y $D = \{a, c, 2, 5\}$

1) En $|A| + |B|$ se cuenta c dos veces. $|A \cup B| = |\{a, b, c, 1, 2\}| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 3 - 1 = 5$

2) En $|A| + |B| + |C|$ se cuenta c dos veces, a dos veces y el 1 dos veces.

$$|A \cup B \cup C| = |\{a, b, c, 1, 2, 3, 4\}| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| = 3 + 3 + 4 - 1 - 1 - 1 = 7$$

3) En $|A| + |B| + |D|$ se cuenta a dos veces, c tres veces y el 2 dos veces.

$$|A \cup B \cup C| = |\{a, b, c, 1, 2, 5\}| = 6 \text{ y}$$

$$|A| + |B| + |D| - |A \cap B| - |A \cap D| - |B \cap D| + |A \cap B \cap C| = 6.$$

4) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$

Ejemplo 2.5

Sean A , B y C conjuntos arbitrarios tales que: A y C son disjuntos, $|A \cup B| = 10$ y $|A \cap B| = 2$. Determine $|A - C| + |B|$.

Solución: Como $A \cap C = \emptyset$ entonces $A - C = A$. Luego, $|A - C| + |B| = |A| + |B|$.

Ahora, como $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, entonces $|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B| = 12$

Ejemplo 2.6

Sean A , B y C conjuntos no nulos tales que: A y C son disjuntos, $|A \cap B| = \frac{1}{3}|A|$ y $|B \cup C| = \frac{1}{5}|A|$. Pruebe que $|A \cup B \cup C| = \frac{13}{15}|A|$.

Solución: Tenemos $A \cap C = \emptyset$ y por tanto $A \cap B \cap C = \emptyset$.

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| \\ &= |A| + |B| + |C| - \frac{1}{3}|A| - |B \cap C| \\ &= |A| - \frac{1}{3}|A| + |B| + |C| - |B \cap C| \\ &= |A| - \frac{1}{3}|A| + |B \cup C| \\ &= |A| - \frac{1}{3}|A| + \frac{1}{5}|A| = \frac{13}{15}|A| \end{aligned}$$

Ejemplo 2.7

Sean A y B subconjuntos de un conjunto universo \mathcal{U} el cual consta de N elementos. Si se sabe que $|A \cap B| = \frac{2N}{5}$, $|B| = \frac{N}{2}$ y $|A \cup B| = \frac{3N}{20}$, calcule $|A|$.

Solución: Solo debe despejar $|A|$ en la fórmula $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

$$|A| = |A \cup B| - |B| + |A \cap B| = \frac{3N}{20} - \frac{N}{2} + \frac{2N}{5}$$

Ejemplo 2.8

Si se sabe que $|A| = 2$, $|B| = 3$ y A y B son conjuntos disjuntos, entonces calcule $|\mathcal{P}(A \times (A \cup B))|$

Solución: Como $A \cap B = \emptyset$ entonces $|A \cup B| = |A| + |B|$.

$$|\mathcal{P}(A \times (A \cup B))| = 2^{|A \times (A \cup B)|} = 2^{|A| \cdot (|A| + |B|)} = 2^{2 \cdot (2+3)}$$

Ejercicios**Cardinalidad**

Ⓡ **2.2.1** Determine la cardinalidad de B si $B = \{\{1,4\}, a, b, \{\{3,4\}\}, \{\emptyset\}\}$

Ⓡ **2.2.2** Probar que $|A| = |A \cap B| + |A - B|$

Ⓡ **2.2.3** Pruebe que $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$

Ⓡ **2.2.4** Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $|A| = 3$, $|A \cap B| = 1$ y $|\mathcal{P}(B)| = 32$. Determine:

1) $|\mathcal{P}(A \Delta B)|$

2) $|(A \cap B) \times \mathcal{P}(B - A)|$

Ⓡ **2.2.5** Sean A y B conjuntos tales que $|A| = 5$, $|B| = 3$ y $|A - B| = 4$. Determine:

1) $|\mathcal{P}(A \cap B) \times \mathcal{P}(A \cup B)|$

2) $|B - A|$

Ⓡ **2.2.6** Sean A , B y C conjuntos arbitrarios tales que $|A| = 5$, $|B| = 4$, $|A \cap B| = 2$, $|\mathcal{P}(C)| = 8$ y $|C - A| = 1$. Determine:

1) $|(A - B) \times \mathcal{P}(A \cup C)|$

$$2) |\mathcal{P}[(A \cap C) \times \mathcal{P}(B - A)]|$$

(R) 2.2.7 (MD-IP-2-2019) Sea \mathcal{U} el conjunto universo y sean A, B y C subconjuntos de \mathcal{U} tal que se sabe que $|\mathcal{U}| = 30$, $|A \cup B| = 23$, $|A \cap B| = 11$, $|A - C| = 12$, $|A \cap C| = 4$, $|B \cap C| = 8$, $|\overline{A \cup B \cup C}| = 5$ y $|A \cap B \cap C| = 3$. Calcule $|A|$, $|B|$ y $|C|$

(R) 2.2.8 Sean A, B y C conjuntos arbitrarios tales que $|A| = 4$, $|B| = 5$, $|A \cap B| = 2$, $|\mathcal{P}(C)| = 8$ y $|C - A| = 1$. Determine:

$$1) |\mathcal{P}(B - A) \times (A \cap C)|$$

$$2) |\mathcal{P}[(A - C) \times C]|$$

(R) 2.2.9 Sean A, B y C conjuntos arbitrarios tales que $|A| = 8$, $|B| = 5$, $|A \cap B| = 2$, $|\mathcal{P}(C)| = 128$ y $|C - A| = 4$ y $B \cap C = \emptyset$. Determine:

$$1) |(A - (B \cup C)) \times \mathcal{P}(A - C)|$$

$$2) |\mathcal{P}[(A \cap C) \times C]|$$

(R) 2.2.10 Sean $A, B \subseteq \mathbb{N}$ conjuntos finitos tal que $|A| = 10$, $|B| = 8$ y $|A - B| = 7$. Calcular $|A \Delta B| + |\mathcal{P}(A \cup (A \times B))|$

(R) 2.2.11 Si $|A| = 3$, $|B| = 2$ y A y B son conjuntos disjuntos, determine $|\mathcal{P}(A \times (A \cup B))|$.

(R) 2.2.12 Si se sabe que A y B son dos conjuntos que cumplen que $|A| = 2$, $|B| = 4$ y $|A \cap B| = 1$, calcule $|\mathcal{P}(A \cup B) \times (A - B)|$.

(R) 2.2.13 Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera en el universo \mathcal{U} , tal que $|\mathcal{U}| = 7$, $|A| = 3$, $|B| = 5$, $|C| = 4$, $|A \cap B| = 2$, $|C - B| = 3$. Determine $|\mathcal{P}((A \Delta B) \times \overline{(B \cap C)})|$.

(R) 2.2.14 Sean A, B y C conjuntos arbitrarios tales que $B \cap C \neq \emptyset$, $|A| = 9$, $|B| = 10$, $|A \cap B| = 3$, $|\mathcal{P}(C)| = 128$, $|C - A| = 3$. Determine la cardinalidad de $(A \cup B) \times \mathcal{P}(A - C)$.

(R) 2.2.15 Sean $A = \{w\}$ y $B = \{5, 2\}$, donde el conjunto universo es $U = \{2, 5, w\}$.

$$1) \text{ Calcule } |\mathcal{P}(A \times B)|$$

$$2) \text{ ¿Cuántos elementos tiene el conjunto } \overline{\mathcal{P}(A \times B)}?$$

(R) 2.2.16 Sean A, B y C tres conjuntos cualesquiera en el universo \mathcal{U} . Se sabe que $|\mathcal{U}| = 7$, $|C| = 4$, $|A| = 3$, $|A \cap B| = 2$, $|B| = 5$ y $|C - B| = 3$. Determine la cantidad de elementos del conjunto $\mathcal{P}((A \Delta B) \times \overline{(B \cap C)})$.

(R) 2.2.17 Sean A, B y M conjuntos arbitrarios con A y M conjuntos disjuntos. Si $|A \cup B \cup M| = 17$, $|M| = 2$ y $|B - M| = 8$, determine $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) \times (A - B)|$

(R) 2.2.18 ¿Cuántos elementos debe tener A para que $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| = 65536$?

(R) 2.2.19 En un universo \mathcal{U} considere tres conjuntos A, B, C tales que A y C son disjuntos y $|A \cap B| = 5$, $|\overline{A}| = 24$, $|C| = 13$, $|B - A| = 15$, $|B \cap C| = 9$ y $|A \cup B \cup C| = 32$. Con estas condiciones determine $|A|$, $|B|$ y $|\mathcal{U}|$

2.3 Leyes de conjuntos (y sus análogas en lógica)

En teoría de conjuntos hay un conjunto de teoremas, los cuales los decimos “leyes” aquí, que muestran que en diferentes contextos y con diferentes operaciones, la “estructura algebraica” es similar.

De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Conmutatividad	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$
Asociatividad	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $P \cap (Q \cap R) = (P \cap Q) \cap R$
Distributividad	$P \cup (Q \cap R) = (P \cup Q) \cap (P \cup R)$ $P \cap (Q \cup R) = (P \cap Q) \cup (P \cap R)$
Idempotencia	$P \cap P = P$ $P \cup P = P$
Inversos	$A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$ $A \cap \overline{A} = \emptyset$
Neutro	$P \cup \emptyset = P$ $P \cap \mathcal{U} = P$
Dominación	$P \cap \emptyset = \emptyset$ $P \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
Absorción	$P \cup (P \cap Q) = P$ $P \cap (P \cup Q) = P$

Ejemplo 2.9

Probar que $(A \cup \overline{B}) \cap \left[\overline{(A \cup \overline{B}) \cup \overline{B}} \right] = \overline{B}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 (A \cup \overline{B}) \cap \left[\overline{(A \cup \overline{B}) \cup \overline{B}} \right] &= (A \cup \overline{B}) \cap \left[\overline{(\overline{A} \cap B) \cup \overline{B}} \right] \text{ (usamos De Morgan)} \\
 &= (A \cup \overline{B}) \cap \left[(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{B}) \right] \text{ (Distributividad)} \\
 &= (A \cup \overline{B}) \cap \left[(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap \mathcal{U} \right] \text{ (Inverso)} \\
 &= (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \text{ (Neutro. } \overline{B} \text{ es "factor común") } \\
 &= (A \cap \overline{A}) \cup \overline{B} = \emptyset \cup \overline{B} = \overline{B}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.10

Probar que $B \cup \overline{[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] \cup B} \cap A = U$

Solución: Primero vamos a aplicar De Morgan,

$$B \cup \overline{[(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})] \cup B} \cap A = B \cup \overline{[(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)] \cup B} \cap A$$

En la expresión que acabamos de simplificar (en azul), \overline{A} es “factor común”,

$$B \cup \overline{[(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)] \cup B} \cap A = B \cup \overline{[\overline{A} \cup (\overline{B} \cap B)] \cup B} \cap A = B \cup \overline{[\overline{A} \cup \emptyset] \cup B} \cap A$$

Ahora volvemos a aplicar De Morgan. Luego aplicamos distributividad.

$$\begin{aligned} B \cup \overline{[\overline{A} \cup B] \cap A} &= B \cup [(A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}] = B \cup [(A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})] = \\ &= B \cup [U \cap (\overline{B} \cup \overline{A})] \\ &= B \cup (\overline{B} \cup \overline{A}) = (B \cup \overline{B}) \cup \overline{A} = U \cup \overline{A} = U \end{aligned}$$

Ejercicios**Simplificación usando leyes de conjuntos**

(R) 2.3.1 Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Use las leyes de conjuntos para verificar la siguiente simplificación (indique en cada paso la ley que utiliza.)

$$(A \cap \overline{B}) \cap \overline{(B \cap \overline{C})} = A \cap \overline{B}$$

(R) 2.3.2 Simplifique las siguientes expresiones. Indique la ley que utiliza a cada paso.

- 1) $\overline{(B \cap A) \cup [A \cup (\overline{B} \cup C) \cup (A \cap C)]}$
- 2) $\overline{(\overline{A} \cap B) \cup [\overline{A} \cap (\overline{B} \cap \overline{C})] \cup (\overline{A} \cap C)}$
- 3) $[(A \cap C) \cup \overline{C \cup \overline{A}}] \cap [(A \cap B) \cap (C \cup B)]$
- 4) $\overline{(Q \cup \overline{P}) \cup (Q \cap R)} \cup \{P \cap [R \cap (\overline{Q} \cap \overline{R})]\}$
- 5) $\overline{[(\overline{A} \cup B) \cup C] \cup (\overline{B} \cap C) \cup A}$
- 6) $\overline{(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{B} \cup A) \cap (\overline{B} \cup C)}$
- 7) $\overline{(A \cup B) \cap C \cup \overline{B}}$

2.4 Demostración de afirmaciones

Para demostrar una proposición en teoría de conjuntos se deben usar las definiciones, las hipótesis de la proposición y posiblemente alguna equivalencia.

En cada caso, debemos acostumbrarnos al tipo de objeto que se debe manejar. Los conjuntos arbitrarios manejan elementos genéricos, los productos cartesianos manejan pares ordenados y los conjuntos de partes, conjuntos. Por ejemplo,

$$a.) x \in A \cup \bar{B} \implies x \in A \vee x \in \bar{B} \implies x \in A \vee x \notin B$$

$$b.) (a, b) \in A \times (B \cap \bar{C}) \implies a \in A \wedge b \in (B \cap \bar{C}) \implies a \in A \wedge (b \in B \wedge b \in \bar{C})$$

$$c.) S \in \mathcal{P}(A \cap B) \implies S \subseteq A \wedge S \subseteq B$$

$$d.) x \notin A \cup B \implies x \in \overline{A \cup B} \text{ o también } x \notin A \cup B \implies x \notin A \wedge x \notin B$$

$$e.) x \notin A \cap B \implies x \in \overline{A \cap B} \text{ o también}$$

$$x \notin A \cap B \implies \neg(x \in A \cap B) \implies \neg(x \in A \wedge x \in B) \implies x \notin A \vee x \notin B$$

Ejemplo 2.11

Demostrar que $A - B \subseteq A$

Demostración: Debemos usar la definición de *subconjunto* y de la resta.

$$x \in A - B \implies x \in A \wedge x \notin B \implies x \in A. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.12

Demostrar que $A \cap B \subseteq B$

Demostración: Debemos usar la definición de *subconjunto* y de la resta.

$$x \in A \cap B \implies x \in A \wedge x \in B \implies x \in B. \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.13

Demostrar que $(A - B) \cap B = \emptyset$

Demostración: Por reducción al absurdo, si asumimos que hay un elemento en $(A - B) \cap B$ entonces llegamos a algo falso.

$$\begin{aligned} \text{Si } \exists x \in (A - B) \cap B &\implies (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \in B \\ &\implies (x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \in B)) \equiv F_0. \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.14

Demostrar que si $A \subseteq B \implies A \cup B = B$

Demostración: Recordemos que, por definición, $A \cup B = B \iff (A \cup B \subseteq B \wedge B \subseteq A \cup B)$.

$A \cup B \subseteq B$

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\implies x \in A \vee x \in B \\ &\implies x \in A \vee x \in B \end{aligned}$$

Por hipótesis, $x \in A \implies x \in B$, pues $A \subseteq B$,

$$\begin{aligned} &\implies x \in B \vee x \in B \\ &\implies x \in B \text{ (por idempotencia)} \\ \therefore A \cup B &\subseteq B \end{aligned}$$

$B \subseteq A \cup B$

$$\begin{aligned} x \in B &\implies x \in B \vee x \in A \text{ (por adición)} \\ &\implies x \in A \cup B \\ \therefore B &\subseteq A \cup B \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.15

Demostrar que si $A \subseteq B \implies A - B = \emptyset$

Demostración: Tenemos una hipótesis: $A \subseteq B$. Ahora procedemos por contradicción¹: Supongamos que $A - B$ no es vacío.

Si $A - B$ no es vacío, $\exists x \in A - B \implies x \in A \wedge x \notin B$. Pero esto es una contradicción, pues por hipótesis, $A \subseteq B$, es decir, $x \in A \implies x \in B$. \blacksquare

¹Las demostraciones “por contradicción”, o por “reducción al absurdo”, son demostraciones que en matemáticas se utilizan con gran libertad, pero no todas las escuelas de pensamiento matemático (por ejemplo el “intuicionismo”) aceptan estas pruebas como universalmente válidas.

Ejemplo 2.16 (Demostración por casos).

Demuestre que si $S \subseteq A \vee S \subseteq B \implies S \subseteq A \cup B$

Demostración: Tenemos dos casos: $S \subseteq A$ o $S \subseteq B$

I Caso. Si $S \subseteq A$ entonces $\forall x \in S \implies x \in A \implies x \in A \vee x \in B$ por adición.

$\therefore x \in A \cup B$, es decir $S \subseteq A \cup B$

II Caso. Si $S \subseteq B$ entonces $\forall x \in S \implies x \in B \implies x \in B \vee x \in A$ por adición.

$\therefore x \in A \cup B$, es decir $S \subseteq A \cup B$

Hemos probado que en cualquier caso, $S \subseteq A \cup B$ ■

Ejemplo 2.17 (Demostración por casos).

Demuestre que si $A \cap B \subseteq \bar{D} \wedge \bar{B} \cap D = \emptyset$ entonces $A \subseteq \bar{D}$

Solución: Bien tenemos dos hipótesis (premisas) y un resultado para demostrar.

$$\text{Hipótesis: } \left\{ \begin{array}{l} A \cap B \subseteq \bar{D} \quad (H1) \\ \bar{B} \cap D = \emptyset \quad (H2) \end{array} \right.$$

Hay que mostrar que: $A \subseteq \bar{D}$

El esquema de la prueba es $x \in A \implies \dots \implies x \in \bar{D}$

Si $x \in A$, podemos usar la hipótesis H1 solo si $x \in A \cap B$, entonces debemos hacer dos casos $x \in A \cap B$ y $x \notin A \cap B$.

Demostración.

$$\text{Sea } x \in A, \text{ entonces } \left\{ \begin{array}{l} \text{si } x \in A \cap B \implies x \in A \cap B \\ \implies x \in \bar{D} \text{ por (H1)} \\ \text{si } x \notin A \cap B \implies x \notin B \\ \implies x \in \bar{B} \\ \implies x \notin D \text{ pues } \bar{B} \cap D = \emptyset \text{ (H2)} \\ \implies x \in \bar{D} \end{array} \right.$$

Entonces en ambos casos, si $x \in A$, concluimos que $x \in \bar{D}$, es decir, $\therefore A \subseteq \bar{D}$ ■

Ejemplo 2.18 (MD-IP-2-2019).

Sean A, B y C conjuntos. Demuestre que $A - B \subseteq C \implies A - C \subseteq B$

Solución: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hipótesis: } A - B \subseteq C \\ \text{HQM: } A - C \subseteq B \end{array} \right.$

- Primera manera, por contradicción:

Si $A - C \not\subseteq B \implies \exists x \in A - C \wedge x \notin B \implies (x \in A \wedge x \notin C) \wedge x \notin B \implies x \in A - B \wedge x \notin C$
lo cual contradice la hipótesis: $A - C \subseteq B$.

- Solución: Segunda manera

$$\begin{aligned} x \in A - C &\implies x \in A \wedge x \notin C \\ &\implies x \in A \wedge x \notin A - B, \text{ pues por hipótesis } A - B \subseteq C \\ &\implies x \in A \wedge \neg[x \in A - B] \\ &\implies x \in A \wedge \neg[x \in A \wedge x \notin B] \\ &\implies x \in A \wedge (x \notin A \vee x \in B) \\ &\implies x \in A \wedge x \in B, \text{ (neutro)} \\ &\implies x \in B \text{ (simplificación) } \blacksquare \end{aligned}$$
Ejemplo 2.19 (MD-IP-2-2019).

Demuestre que $(A \cap C) \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$

Solución:

$$\begin{aligned} (a, b) \in (A \cap C) \times (B \cup C) &\implies (a \in A \cap C) \wedge (b \in B \cup C) \\ &\implies (a \in A \wedge a \in C) \wedge (b \in B \vee b \in C) \\ &\implies a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C) \wedge a \in C \quad \text{Conmut., Asociat.} \\ &\implies a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C) \quad \text{Simplificación} \\ &\implies (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C) \quad \text{Distrib.} \\ &\implies (a, b) \in A \times B \vee (a, b) \in A \times C \\ &\implies (a, b) \in (A \times B) \cap (A \times C) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 2.20

Demuestre que si $S \neq \emptyset$ y $S \subseteq A - B$ entonces $S \subseteq A \wedge S \not\subseteq B$.

Demostración: Por hipótesis, $\forall x \in S$ entonces $x \in A - B \implies x \in A \wedge x \notin B$

$$\therefore S \subseteq A \wedge S \not\subseteq B \quad \blacksquare$$

Observe que $\emptyset \subseteq A - B$ y $\emptyset \subseteq A \wedge \emptyset \subseteq B$.

Ejemplo 2.21

Demuestre que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Demostración: HQM $\forall S \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \implies S \in \mathcal{P}(A \cup B)$

$\forall S \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \implies S \in \mathcal{P}(A) \vee S \in \mathcal{P}(B) \implies S \subseteq A \vee S \subseteq B \implies S \subseteq A \cup B$, por lo tanto $S \in \mathcal{P}(A \cup B)$ \blacksquare

Ejemplo 2.22 (Por contradicción).

Demuestre que $[A \cup B \subseteq C \cup D, A \cap B = \emptyset, C \subseteq A] \implies B \subseteq D$.

Solución: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Hipótesis: } A \cup B \subseteq C \cup D, A \cap B = \emptyset, C \subseteq A \\ \text{HQM: } B \subseteq D \end{array} \right.$

Por contradicción:

$$\begin{aligned} \text{Si } \exists x \in B \wedge x \notin D &\implies x \in A \cup B \wedge x \notin D && \text{Adición} \\ &\implies x \in C \cup D \wedge x \notin D && \text{Hipótesis } A \cup B \subseteq C \cup D \\ &\implies x \in C \\ &\implies x \in A && \text{Hipótesis } C \subseteq A \\ &\therefore x \in B \wedge x \in A \end{aligned}$$

Pero $x \in B \wedge x \in A$ contradice la hipótesis $A \cap B = \emptyset$ \blacksquare

Ejemplo 2.23 (Por contradicción).

Demuestre que $S \times T = \emptyset \implies [S = \emptyset \vee T = \emptyset]$

$$\text{Solución: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Hipótesis: } S \times T = \emptyset \\ \text{HQM: } S = \emptyset \vee T = \emptyset \end{array} \right.$$

Por contradicción: Si $\neg[S = \emptyset \vee T = \emptyset] \implies S \neq \emptyset \wedge T \neq \emptyset \implies \exists s \in S \wedge \exists t \in T$ tal que $(s, t) \in S \times T$, lo cual contradice la hipótesis $S \times T = \emptyset$ ■

Ejemplo 2.24

Demostrar que $\mathcal{P}(A - B) \subseteq [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$

Demostración: $\emptyset \in \mathcal{P}(A - B)$ pero $\emptyset \notin \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$. Por eso hay que hacer dos casos.

I Caso. Si $S \neq \emptyset$ y $S \in \mathcal{P}(A - B) \implies S \subseteq A - B \implies S \subseteq A \wedge S \not\subseteq B$.
Por tanto $S \in \mathcal{P}(A) \wedge S \notin \mathcal{P}(B)$, es decir, $S \in \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$ y por tanto $S \in [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$.

II Caso. Si $S = \emptyset$ entonces $S \in \mathcal{P}(A - B)$ y $S \in [\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)] \cup \{\emptyset\}$ ■

Ejemplo 2.25 (IP-MD-2-2019).

Demuestre que si $S \in \mathcal{P}(A - B) \implies S \subseteq A \cap \bar{B}$

$$\text{Solución: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Hipótesis: } S \in \mathcal{P}(A - B) \\ \text{HQM: } S \subseteq A \cap \bar{B} \end{array} \right.$$

Si $x \in S \implies x \in A - B$ pues $S \in \mathcal{P}(A - B) \implies S \subseteq A - B$
 $\implies x \in A \wedge x \notin B$
 $\implies x \in A \wedge x \in \bar{B}$
 $\therefore x \in A \cap \bar{B}$ ■

Ejemplo 2.26

Demuestre que $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

Demostración: Hay que probar dos inclusiones. La naturaleza de la proposición no permite hacer un " \iff ". Observe que, por definición, $(x, y) \notin P \times Q$ si y solo si $x \notin P \vee y \notin Q$

$$\text{I. } A \times (B - C) \subseteq (A \times B) - (A \times C).$$

Sea $(x, y) \in A \times (B - C) \implies x \in A \wedge y \in (B - C) \implies x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C$ entonces $(x, y) \in A \times B \wedge (x, y) \notin A \times C$, es decir, $(x, y) \in (A \times B) - (A \times C)$.

$$\text{II. } (A \times B) - (A \times C) \subseteq A \times (B - C)$$

Sea $(x, y) \in (A \times B) - (A \times C) \implies (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \notin (A \times C)$ entonces usando distributividad y neutro, tenemos

$$x \in A \wedge y \in B \wedge (x \notin A \vee y \notin C) \equiv x \in A \wedge y \in B \wedge (x \in A \wedge y \notin C),$$

es decir $(x, y) \in A \times (B - C)$ ■

Ejercicios**Demostración de afirmaciones**

(B) 2.4.1 Sean A, B, C y D conjuntos arbitrarios. Demuestre la validez de las siguientes proposiciones:

- 1) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
- 2) $A - B = A \cap \bar{B}$
- 3) $(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$
- 4) $C \subset (A \cap B) \implies [C \cap (B - A) = \emptyset]$
- 5) $A \times (\overline{B \cap C}) = (A \times \bar{B}) \cup (A \times \bar{C})$
- 6) $(A \cup B) \subseteq (C \cap D) \implies \bar{C} \subseteq (\bar{A} \cup \bar{B})$
- 7) $(A \cap C) - B = (A - B) \cap (C - B)$
- 8) $(C \subseteq \bar{A} \wedge C \cap \bar{B} = \emptyset) \implies C \subseteq B - A$
- 9) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap \bar{C}$

- 10) $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) \cup C$
- 11) $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \implies (A \times \bar{D} \subseteq C \times \bar{B})$
- 12) $A \subseteq \bar{B} \iff A \cap B = \emptyset$
- 13) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
- 14) $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D) \implies (A \cup C \subseteq B \cup D)$
- 15) $A \times (B \cap C) \subseteq (A \times B) \cap (A \times C)$
- 16) $(A \cup B) - C \subseteq (A \cup B) \cap \bar{C}$
- 17) $(\overline{A \cap B} - \bar{B}) \subseteq \bar{A}$
- 18) $(\overline{A \cup B} \cup C) \cap (A - C) = \emptyset$
- 19) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$
- 20) $(D \subseteq A - B \wedge E \subseteq A \cap B) \implies D \cap E = \emptyset$
- 21) $A \subseteq (B \cap D) \implies \bar{B} \subseteq (\bar{A} \cup C)$
- 22) $(\bar{C} \subseteq B \wedge B \cap A = \emptyset) \implies A \in \mathcal{P}(C)$

R **2.4.2** Para las siguientes proposiciones, utilice un contraejemplo para demostrar que son falsas:

- 1) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$
- 2) $(A - B) \cup C \subseteq A - (B \cup C)$
- 3) $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$
- 4) $(A \cup B = A \Delta C) \implies (A \cap C = \emptyset \wedge C = B)$
- 5) $A \cap B \subseteq D \wedge B \cap D \neq \emptyset \implies A \subseteq D$
- 6) $(A \cap B = A \cap C) \implies (B = C)$

R **2.4.3** Si $\mathcal{U} = \{1, 2\}$ es el conjunto universo, demuestre, con un contraejemplo, que la proposición $\mathcal{P}(\bar{A}) \subseteq \overline{\mathcal{P}(A)}$ es falsa.

R **2.4.4** Sean A, B, C conjuntos arbitrarios. Demuestre

$$[A \cup B = C] \wedge (A \cup C) \cap B = C \implies B = C$$

R **2.4.5** Sean A, B, C conjuntos arbitrarios. Demuestre $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$

R **2.4.6** Sean A, B, C, D y M conjuntos arbitrarios. Demuestre

$$[(A \cup B = C) \wedge (A \cup C) \cap B = C \wedge (A \cap C) \cup B = A] \implies (B = C \wedge A = C)$$

2.4.7 Sean A, B, C, D y M conjuntos arbitrarios. Demuestre

$$[(M \subseteq A \cap \bar{B}) \wedge (D \subseteq A \cap B)] \implies M \cap D = \emptyset$$

2.4.8 Demuestre que $A \subseteq (B \cap D) \implies \bar{B} \subseteq (\bar{A} \cup C)$

2.4.9 Demuestre que $B - A \subseteq \overline{A \cap B}$

2.4.10 Demuestre que si $\bar{B} \cap D = \emptyset$ entonces $D \subseteq B$

2.4.11 Demuestre que si $A \subseteq B \wedge A \subseteq D$, entonces $\overline{B \cap D} \subseteq \bar{A}$

2.4.12 a.) Encuentre un contraejemplo para $(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta (B \cup C)$

b.) (*) Demuestre que $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

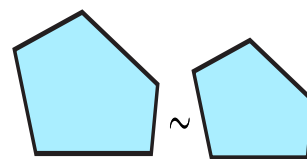
2.4.13 Paradoja de Russel. Sea M el “conjunto de todos los conjuntos que no se contienen a sí mismos como miembros”. Hay conjuntos que se contienen a sí mismos, como el conjunto de “ideas abstractas” que en sí es una idea abstracta. Volviendo a M , entonces ¿ $M \in M \iff M \notin M$?

2.4.14 Paradoja de Berry. Sea A el “conjunto de enteros que se pueden definir con menos de quince palabras”. Claramente A es finito pues el número de frases que se pueden formar con menos de quince palabras es finito y entonces $A \neq \mathbb{N}$. Algunas de estas frases pueden describir un entero positivo específico, por ejemplo “dosmil trescientos cuarenta”, “el primer número primo mayor que veinte millones” o “dos elevado a la 20”. Como A es finito, entonces \bar{A} debe tener un elemento menor que todos los otros. Tiene que haber un número entero positivo N que sea el menor de todos los números enteros positivos que no están contenidos en A , es decir, $N \in \bar{A}$... pero entonces ¿ $N \in A$ pues N es “el menor entero positivo que no se puede definir con menos de quince palabras”?

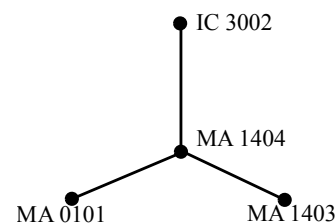
Relaciones binarias

Hay varias relaciones familiares, entre los objetos de un conjunto. Por ejemplo, la relación de orden " \leq " en los números reales o la relación de similitud " \sim " en un conjunto de polígonos o la relación " $=$ ", etc.

La similitud es una de las propiedades más importantes de las figuras planas. Dos polígonos son similares si sus ángulos respectivos son iguales. En matemáticas hay muchas situaciones donde uno desea observar objetos diferentes como si esencialmente fueran el mismo, como en el caso de polígonos similares. Para hacer esta idea precisa generalizamos la idea de similitud y a estas relaciones las llamamos "relaciones de equivalencia."



Las relaciones de orden sobre un conjunto nos dan una noción de "precedencia". Esta idea tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, en la malla de cursos de una carrera, podríamos tener un conjunto de materias $\{MA\ 0101, MA\ 1403, MA\ 0404, IC\ 3010\}$. Una manera de ordenar este conjunto es definir un relación de orden, por ejemplo la relación "es requisito de"; esta relación induce un orden en este conjunto. El orden se puede representar con un diagrama.



Definición 3.1

- 1) Una relación \mathcal{R} de un conjunto A en un conjunto B es un triple $(G_{\mathcal{R}}, A, B)$, donde $G_{\mathcal{R}} \subseteq A \times B$. $G_{\mathcal{R}}$ se llama *gráfico* de \mathcal{R} . El conjunto A se llama conjunto de partida y B es el conjunto de llegada.
- 2) La notación " $a \mathcal{R} b$ " indica que $(a, b) \in G_{\mathcal{R}}$ y se lee " a se relaciona con b " vía la relación \mathcal{R} .
- 3) Si $A = B$, se dice que \mathcal{R} es "una relación sobre A ".

Definición 3.2

Dada una relación \mathcal{R} de A en B , el dominio y el rango de la relación se definen de la siguiente manera.

- 1) Dominio de la relación $\mathcal{R} : D_{\mathcal{R}} = \{a \in A \text{ tal que } \exists b \in B \text{ y } a \mathcal{R} b\}$
- 2) Rango de la relación $\mathcal{R} : \mathcal{R}[A] = \{b \in B \text{ tal que } \exists a \in A \text{ y } a \mathcal{R} b\}$

Ejemplo 3.1

Sea $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{2,3,4\}$. La relación \mathcal{R} , de A en B , está definida por el criterio $a \mathcal{R} b \iff a + 1 = b$. Determine $G_{\mathcal{R}}$, $D_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{R}[A]$.

Solución: Por ejemplo, $2 \mathcal{R} 3$ pues $2 + 1 = 3$. $G_{\mathcal{R}} = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

Para visualizar la relación, hacemos una tabla con el producto cartesiano, con los elementos de A en las filas.

$A \times B$	2	3	4	$G_{\mathcal{R}}$	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,4)	3	(3,1)	(3,2)	(3,4)

Como se observa, $G_{\mathcal{R}} = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$. En este caso, $D_{\mathcal{R}} = A$ y $\mathcal{R}[A] = B$

Ejemplo 3.2

Sea $A = \{1,2\}$ y $B = \{0,3\}$. La relación \mathcal{R} sobre $A \times B$ está definida por el criterio $(a,b) \mathcal{R} (c,d) \iff ad \geq bc$. Determine $G_{\mathcal{R}}$, $D_{\mathcal{R}}$ y $\mathcal{R}[A]$.

Solución: Por ejemplo, $(1,2) \mathcal{R} (0,3)$ pues $1 \cdot 3 \geq 2 \cdot 0$. Para visualizar la relación, hacemos una tabla con el producto cartesiano. En la tabla ponemos 1 si hay relación entre los pares asociados y un 0 sino.

$G_{\mathcal{R}}$	(1,0)	(1,3)	(2,0)	(2,3)
(1,0)	1	1	1	1
(1,3)	0	1	0	0
(2,0)	1	1	1	1
(2,3)	0	1	0	1

Entonces,

$$G_{\mathcal{R}} = \{((1,0),(1,0)), ((1,0),(1,3)), ((1,0),(2,0)), ((1,0),(2,3)), ((1,3),(1,3)), ((2,0),(1,0)), ((2,0),(1,3)), ((2,0),(2,0)), ((2,0),(2,3)), ((2,3),(1,3)), ((2,3),(2,3))\}$$

$$D_{\mathcal{R}} = A \times B$$

$$\mathcal{R}[A \times B] = A \times B$$

3.1 Operaciones con relaciones

Definición 3.3

Dadas las relaciones $\mathcal{R} = (G_{\mathcal{R}}, A, B)$ y $\mathcal{S} = (G_{\mathcal{S}}, A, B)$, se definen las nuevas relaciones

1) La relación unión: $\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = (G_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}, A, B)$ con $G_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = G_{\mathcal{R}} \cup G_{\mathcal{S}}$

$$a \mathcal{R} \cup \mathcal{S} b \iff a \mathcal{R} b \vee a \mathcal{S} b \iff (a, b) \in G_{\mathcal{R}} \cup G_{\mathcal{S}}$$

2) La relación intersección: $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = (G_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}}, A, B)$ con $G_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = G_{\mathcal{R}} \cap G_{\mathcal{S}}$

$$a \mathcal{R} \cap \mathcal{S} b \iff a \mathcal{R} b \wedge a \mathcal{S} b \iff (a, b) \in G_{\mathcal{R}} \cap G_{\mathcal{S}}$$

3) La relación diferencia: $\mathcal{R} - \mathcal{S} = (G_{\mathcal{R} - \mathcal{S}}, A, B)$ con $G_{\mathcal{R} - \mathcal{S}} = G_{\mathcal{R}} - G_{\mathcal{S}}$

$$a \mathcal{R} - \mathcal{S} b \iff a \mathcal{R} b \wedge a \notin \mathcal{S} b \iff (a, b) \in G_{\mathcal{R}} - G_{\mathcal{S}}$$

4) La relación inversa: $\mathcal{R}^{-1} = (G_{\mathcal{R}^{-1}}, B, A)$ con $G_{\mathcal{R}^{-1}} = \{(b, a) \in B \times A \text{ tal que } a \mathcal{R} b\}$

$$b \mathcal{R}^{-1} a \iff a \mathcal{R} b \iff (a, b) \in G_{\mathcal{R}}$$

5) La relación complemento: $\overline{\mathcal{R}} = (\overline{G_{\mathcal{R}}}, A, B)$ con $\overline{G_{\mathcal{R}}} = A \times B - G_{\mathcal{R}}$

$$a\overline{\mathcal{R}}b \iff a\mathcal{R}b \iff (a,b) \in A \times B \wedge (a,b) \notin G_{\mathcal{R}}$$

6) Composición: Si $\mathcal{R} = (G_{\mathcal{R}}, A, B)$ y $\mathcal{S} = (G_{\mathcal{S}}, B, C)$ entonces se define

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = (G_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}}, A, C) \text{ con } G_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} = \{(a,c) \in A \times C \text{ tal que } \exists b \in B \text{ con } a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{S}c\}$$

$\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ es una relación de A en C . Observe que si $A = C$ entonces podemos definir $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ tanto como $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$.

Ejemplo 3.3

Sean $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{2,3,4\}$.

La relación \mathcal{R} , de A en B , está definida por el criterio $a\mathcal{R}b \iff a+1=b$.

La relación \mathcal{S} , de A en B , está definida por el criterio $a\mathcal{S}b \iff \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } a=bk+1$.

Por ejemplo, $2\mathcal{R}3$ pues $2+1=3$ y $3\mathcal{S}2$ pues $3=2 \cdot 1+1$.

Para visualizar algunas operaciones con estas relaciones, hacemos una tabla con el producto cartesiano, con los elementos de A en las filas.

$G_{\mathcal{R}}$	2	3	4	$\overline{G_{\mathcal{R}}}$	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	3	(3,2)	(3,3)	(3,4)
	$G_{\mathcal{R}^{-1}}$	1	2	3			
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)			
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)			
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)			
$G_{\mathcal{S}}$	2	3	4	$\overline{G_{\mathcal{S}}}$	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

$G_{S^{-1}}$	1	2	3
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)

$G_{R \cup S}$	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

$G_{R \cap S}$	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

G_{R-S}	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

Observe que $R \cap S = (G_{R \cap S}, A, B)$ y $(R \cap S)^{-1} = (G_{(R \cap S)^{-1}}, B, A)$. Entonces el complemento $\overline{(R \cap S)^{-1}}$ se calcula en $B \times A$.

$G_{(R \cap S)^{-1}}$	1	2	3
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)

$G_{\overline{(R \cap S)^{-1}}}$	1	2	3
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)

El cálculo de $\overline{(R \cap S)^{-1}}$ se debe hacer en $B \times A$ pues $\overline{R \cap S} \subseteq A \times B$.

$G_{R \cap S}$	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

$G_{\overline{R \cap S}}$	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

$G_{\overline{(R \cap S)^{-1}}}$	1	2	3
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)

Ejemplo 3.4 (Composición)

Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$ y sean R, S y T relaciones sobre A definidas por

$$G_R = \{(1,2), (2,2), (2,3), (1,3)\},$$

$$G_S = \{(2,4), (2,5), (3,1)\} \text{ y}$$

$$G_T = \{(3,1), (3,3), (3,4)\}.$$

1) Cálculo de $G_{S \circ R}$ y $G_{T \circ R}$

Como en ambos casos, R es la primera relación que se aplica, la ponemos como primera columna de cada tabla. En la última columna aparece el resultado.

El método es: Para cada $(a,b) \in G_R$, buscamos $(b,c) \in G_S$ y obtenemos $(a,c) \in G_{S \circ R}$.

$G_{S \circ R}$			$G_{T \circ R}$		
G_R	G_S	$G_{S \circ R}$	G_R	G_T	$G_{T \circ R}$
(1,2)	(2,4)	(1,4)	(1,2)	(3,1)	(2,1)
(2,2)	(2,5)	(1,5)	(2,2)	(3,3)	(2,3)
(2,3)	(3,1)	(2,4)	(2,3)	(3,4)	(2,4)
(1,3)		(2,5)	(1,3)		(1,1)
		(2,1)			(1,3)
		(1,1)			(1,4)

2) Contraejemplo: $(S \cap T) \circ R \neq (S \circ R) \cap (T \circ R)$

$G_{(S \cap T) \circ R}$			$G_{(S \circ R) \cap (T \circ R)}$		
G_R	$G_{S \cap T}$	$G_{(S \cap T) \circ R}$	$G_{S \circ R}$	$G_{T \circ R}$	$G_{(S \circ R) \cap (T \circ R)}$
(1,2)		(2,1)	(1,4)	(2,1)	(1,4)
(2,2)	(3,1)	(1,1)	(1,5)	(2,3)	(2,4)
(2,3)			(2,4)	(2,4)	(2,1)
(1,3)			(2,5)	(1,1)	(1,1)
			(2,1)	(1,3)	
			(1,1)	(1,4)	

Ejemplo 3.5

Sea \mathcal{R} una relación definida sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, con criterio $a \mathcal{R} b \iff a + 1 \leq b$. Además sean \mathcal{S} y \mathcal{T} relaciones definidas sobre A cuyos gráficos son

$$G_{\mathcal{S}} = \{(2,4), (2,5), (3,1), (4,3)\} \text{ y } G_{\mathcal{T}} = \{(3,1), (3,3), (4,3)\}$$

- Determine el gráfico asociado a la relación \mathcal{R}
- Determine el gráfico asociado a la relación $(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \circ \mathcal{R}$

Solución:

$G_{\mathcal{R}}$	1	2	3	4	5
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)

$G_{\mathcal{R}}$	$G_{\mathcal{S} \cap \mathcal{T}}$	$G_{(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \circ \mathcal{R}}$
(1,2)	(3,1)	(1,1)
(1,3)	(4,3)	(2,1)
(1,4)		(1,3)
(1,5)		(2,3)
(2,3)		(3,3)
(2,4)		
(2,5)		
(3,4)		
(3,5)		
(4,5)		

3.2 Matriz asociada a una relación

Una matriz $A_{m \times n}$ es un arreglo rectangular de m filas y n columnas.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fila 1, Columna 1

Fila m , Columna n

A veces se escribe $A = (a_{ij})_{n \times m}$. La "entrada" a_{ij} está en la fila i y en la columna j .

Definición 3.4

La matriz transpuesta de $A = (a_{ij})_{n \times m}$ es la matriz $A^T = (a_{ji})_{m \times n}$.

Definición 3.5

Una matriz booleana es una matriz $A = (a_{ij})_{n \times m}$ con $a_{ij} = 0$ o $a_{ij} = 1$

Ejemplo 3.6 (Matriz booleana y su transpuesta)

$$A_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_{4 \times 3}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definición 3.6

Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ conjuntos de cardinalidad n y m respectivamente. Se define la matriz asociada a una relación \mathcal{R} como la matriz booleana

$$M_{\mathcal{R}}[i, j] = (m_{ij})_{n \times m} \text{ con } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \mathcal{R} b_j \\ 0 & \text{si } a_i \not\mathcal{R} b_j \end{cases}$$

Ejemplo 3.7

Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4\}$. Considere las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} de A en B , definidas de la siguiente manera: $a \mathcal{R} b \iff a + 1 = b$ y $a \mathcal{S} b \iff \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $a = bk + 1$.

Ahora podemos visualizar la relación como un subconjunto de $A \times B$ y su representación con una matriz booleana.

$G_{\mathcal{R}}$	2	3	4	$M_{\mathcal{R}}$	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	1	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	2			
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	3			

G_S	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

M_S	2	3	4
1	1	1	1
2	0	0	0
3	1	0	0

Ejemplo 3.8

Sea $A = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$. Sea \mathcal{R} una relación sobre A , definida por el criterio $S \mathcal{R} T$ si y solo si el elemento mínimo de S es igual al elemento mínimo de T . Determine la matriz asociada a \mathcal{R} .

Solución: Por ejemplo, $\{2\} \mathcal{R} \{2,3\}$ pues $\min \{2\} = 2$ y $\min \{2,3\} = 2$.

\mathcal{R}	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1\}$	1	0	0	1	1	0	1
$\{2\}$	0	1	0	0	0	1	0
$\{3\}$	0	0	1	0	0	0	0
$\{1,2\}$	1	0	0	1	1	0	1
$\{1,3\}$	1	0	0	1	1	0	1
$\{2,3\}$	0	1	0	0	0	1	0
$\{1,2,3\}$	1	0	0	1	1	0	1

Operaciones de relaciones vía operaciones con matrices booleanas. Se pueden definir operaciones sobre matrices booleanas para calcular la matriz booleana de las relaciones $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, \mathcal{R}^{-1} y $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.

Si $a, b \in \{0,1\}$, usamos la notación
$$\begin{cases} a \vee b = \text{Máx} \{a, b\} \\ a \wedge b = a \cdot b \end{cases}$$

De esta manera: $1 \wedge 1 = 1$, $1 \wedge 0 = 0$, $1 \vee 0 = 1$, $0 \vee 0 = 0$ y $1 \vee 1 = 1$

Definición 3.7

Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{n \times m}$ son matrices booleanas. Se define

a.) Conjunción: $A \wedge B = (c_{ij})_{n \times m}$ con $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} = 1 \wedge b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{si } a_{ij} = 0 \vee b_{ij} = 0 \end{cases}$

Es decir, $A \wedge B = (a_{ij} \wedge b_{ij})_{n \times m}$

b.) Disyunción: $A \vee B = (d_{ij})_{n \times m}$ con $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_{ij} = 1 \vee b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{si } a_{ij} = 0 \wedge b_{ij} = 0 \end{cases}$

Es decir, $A \vee B = (a_{ij} \vee b_{ij})_{n \times m}$

Teorema 3.1

Si $M_{\mathcal{R}}$ y $M_{\mathcal{S}}$ son las matrices booleanas que representan a las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} , entonces

$$M_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = M_{\mathcal{R}} \vee M_{\mathcal{S}}$$

$$M_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = M_{\mathcal{R}} \wedge M_{\mathcal{S}}$$

Ejemplo 3.9

Consideremos las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} del ejemplo 3.7. Vamos a calcular $M_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$ y $M_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}}$ de manera "manual" y usando las operaciones \vee e \wedge

$G_{\mathcal{R}}$	2	3	4	$G_{\mathcal{S}}$	2	3	4	$G_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	

	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{0} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{0} & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \textcircled{0} & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{R}} \vee M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \textcircled{0} & 1 \end{bmatrix} = M_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$$

The diagram illustrates the construction of the matrix $M_{R \cap S}$ from two matrices M_R and M_S . It shows three tables representing relations G_R , G_S , and $G_{R \cap S}$, and three matrices M_R , M_S , and $M_R \wedge M_S$.

The tables G_R , G_S , and $G_{R \cap S}$ are:

G_R	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

G_S	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

$G_{R \cap S}$	2	3	4
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)

The matrices M_R , M_S , and $M_R \wedge M_S$ are:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_R \wedge M_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_{R \cap S}$$

Definición 3.8

Sean $A = (a_{ij})_{n \times k}$ y $B = (b_{ij})_{k \times m}$ son matrices booleanas. Se define

Producto booleano $A \odot B = (p_{ij})_{n \times m}$ con $p_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists k \text{ tal que } a_{ik} = b_{kj} = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Es decir, $A \odot B = (p_{ij})_{n \times m} = (p_{ij})_{n \times m}$ con $p_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$

La entrada p_{ij} de la matriz $A \odot B$ es el “producto booleano” de la fila F_i de A con la columna C_j de B

$$F_i \odot C_j = [a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{ik}] \odot \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{kj} \end{bmatrix} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

De este modo, si la fila F_i de A tiene al menos una entrada $a_{ik} = 1$ tal que la columna C_j tiene su respectiva entrada $b_{kj} = 1$, entonces $p_{ij} = 1$



Ejemplo 3.10

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} &= \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \\ (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \end{bmatrix}_{2 \times 2} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 2} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3} &= \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & \boxed{} & \boxed{} \\ \dots & & \dots \\ (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & \boxed{} & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \end{bmatrix}_{3 \times 3} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Teorema 3.2 (Propiedades de las operaciones con matrices booleanas)

Sean A , B y C matrices booleanas. Suponiendo que las operaciones que se indican son compatibles, tenemos

- | | |
|----------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| a.) $A \vee A = A$ | f.) $A \wedge B = B \wedge A$ |
| b.) $A \vee B = B \vee A$ | g.) $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ |
| c.) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$ | h.) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ |
| d.) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ | i.) $A \odot (B \odot C) = (A \odot B) \odot C$ |
| e.) $A \wedge A = A$ | |

Teorema 3.3

Si $M_{\mathcal{R}}$ y $M_{\mathcal{S}}$ son las matrices booleanas que representan a las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} , entonces

$$\begin{aligned}
 M_{\mathcal{R}^{-1}} &= M_{\mathcal{R}}^T \\
 M_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} &= M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{S}}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 3.11

Consideremos las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} del ejemplo 3.7.

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{\mathcal{R}^{-1}} = M_{\mathcal{R}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3.12 (Composición)

Sea $A = \{1,2,3\}$ y sean \mathcal{R}, \mathcal{S} relaciones sobre A definidas por $G_{\mathcal{R}} = \{(1,2), (2,2), (2,3), (1,3)\}$ y $G_{\mathcal{S}} = \{(2,1), (3,1), (3,3)\}$.

Vamos a usar la operación \odot para calcular $G_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}}$. Matricialmente sería así: Si la fila F_i tiene al menos una "coincidencia" de 1's con la columna C_j , entonces la entrada $p_{ij} = 1$.

$G_{\mathcal{R}}$	1	2	3	$G_{\mathcal{S}}$	1	2	3	$\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	1	(1,1)		(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	2	(2,1)		(2,3)	2			
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	3	(3,1)		(3,3)	3			

Ahora vamos a hacer el cálculo de $M_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}}$ como $M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{S}}$.

$$M_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicios

3.2.1 Para $A = \{1,4,7\}$, sea \mathcal{R} una relación sobre A definida por $a \mathcal{R} b \iff ab < 16$ y

sea \mathcal{S} otra relación sobre A tal que $M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

- 1) Determine el gráfico de \mathcal{R} .
- 2) Determine la matriz asociada a $\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}$.

3) Determine el gráfico asociado a $(S^{-1} \circ R) - \overline{\mathcal{R}}$.

3.2.2 Sea $A = \{0, 2, 4, 6\}$, sea \mathcal{R} una relación sobre A , cuya matriz asociada está definida por (se define cada la entrada m_{ij}),

$$M_{\mathcal{R}}[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 3 \vee j = 2 \vee i = j \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y sea \mathcal{S} otra relación sobre A , definida por $a \mathcal{S} b \iff a + b \in A$.

- 1) Determine el gráfico de \mathcal{R} y el gráfico de \mathcal{S} .
- 2) Determine la matriz asociada de $\overline{\mathcal{S}} \circ \mathcal{R}^{-1}$.
- 3) Determine el gráfico de $(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) - (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$.

3.2.3 Considere las dos relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} definidas sobre el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$, donde \mathcal{R} está definida por $a \mathcal{R} b \iff (a - b)^2 \in A$ y el par ordenado (i, j) pertenece al gráfico de \mathcal{S} si y solo si $i - j \geq 1$.

- 1) Determine el gráfico de $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^{-1}) - \mathcal{R}$.
- 2) Determine la matriz asociada a $(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) - \overline{\mathcal{R}}$.

3.2.4 Considere las dos relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} definidas sobre el conjunto $A = \{3, 4, 5, 6\}$, tales que:

$$a \mathcal{R} b \iff [b = 6 \vee (a - b)^2 = 1] \quad \text{y} \quad M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 1) Determine el gráfico de \mathcal{R} y el gráfico de \mathcal{S} .
- 2) Determine la matriz asociada a $\overline{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} \cap \mathcal{R}$

3.2.5 Sea $A = \{1, 2, 3, 5\}$, y sea \mathcal{R} una relación sobre A , cuya matriz asociada está definida por:

$$M_{\mathcal{R}}[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 2 \vee j = 3 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y sea \mathcal{S} otra relación sobre A , definida por $a \mathcal{S} b \iff a + b < 6$.

- 1) Determine el gráfico de \mathcal{R} , el gráfico de \mathcal{S} y el gráfico de $\mathcal{R}^{-1} \circ \overline{\mathcal{S}}$.
- 2) Determine la matriz asociada a $(\overline{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S})^{-1}$.

R 3.2.6 Para $A = \{3, 4, 6\}$, sea \mathcal{R} una relación sobre A definida por

$$a \mathcal{R} b \iff (a + b \leq 8 \vee b = 3)$$

y sea \mathcal{S} otra relación sobre A , cuya matriz asociada es $M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

- 1) Determine el gráfico de $\mathcal{S} - \mathcal{R}$.
- 2) Determine la matriz asociada a $\overline{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}}$.
- 3) Determine el gráfico asociado a $(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \cap \mathcal{S}^{-1}$.

R 3.2.7 Considere las dos relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} definidas sobre el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$, donde:

$$a \mathcal{R} b \iff [a + b < 10]$$

y la matriz de \mathcal{S} cumple que $M_{\mathcal{S}}[i, j] = 1 \iff [i = 2 \vee j = 3]$.

- 1) Calcule el gráfico de \mathcal{R} y el gráfico de \mathcal{S} .
- 2) Determine la matriz asociada a la relación $(\overline{\mathcal{R} - \mathcal{S}^{-1}}) \cup (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$.

R 3.2.8 Considere las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} definidas de A en B , $A = \{x, y, z\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, tales que:

$$M_{\mathcal{R}}[i, j] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \vee j = 4 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine:

- 1) La matriz asociada a la relación \mathcal{R} y los gráficos de las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} .
- 2) El gráfico de $\mathcal{R} \cap \overline{\mathcal{S}}$.
- 3) La matriz asociada a la relación $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}$.

R 3.2.9 Considere las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} definidas de A en B , $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, tales que:

$$M_{\mathcal{R}}[i, j] = m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i + j > 4 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad \text{y} \quad M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine

- a.) La matriz asociada a la relación \mathcal{R} y los gráficos de las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} .
- b.) El gráfico de $\mathcal{R} \cap \overline{\mathcal{S}}$
- c.) La matriz asociada a la relación $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}$.

3.2.10 Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} dos relaciones definidas sobre $A = \{1, 2, 3, 5\}$ tales que:

$$a \mathcal{R} b \iff (a < 2 \vee a + b \geq 5) \quad \text{y} \quad M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 1) Calcule el gráfico de la relación $(\mathcal{R} - \mathcal{S})^{-1}$.
- 2) Calcule la matriz asociada a la relación $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) \circ \overline{\mathcal{S}}$.

3.2.11 Considere el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$, sobre el cual se definen dos relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} .

- La relación \mathcal{R} se define por: $a \mathcal{R} b \iff (b - a)^2 \in A$
- El gráfico de la relación \mathcal{S} está dado por $G_{\mathcal{S}} = \{(2, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 6), (8; 2)\}$.

- a.) Determine el gráfico de la relación \mathcal{R}
- b.) Determine el gráfico de la relación $\overline{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} \cup \mathcal{R}^{-1}$.

3.2.12 Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones sobre $A = \{1, 2, 3, 4\}$. \mathcal{R} se define por el criterio:

$$a \mathcal{R} b \iff (a + b \text{ es par}) \vee (b \text{ es par}).$$

Y \mathcal{S} la definimos con el gráfico $G_{\mathcal{S}} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 3), (4, 2), (4, 3)\}$.

- a.) Determine el gráfico de \mathcal{R}
- b.) Determine el gráfico de $\mathcal{S}^{-1} \cap \overline{\mathcal{R}}$

3.2.13 Considere las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} definidas sobre A , con matrices asociadas

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- a.) Determine $M_{\mathcal{R}} \vee M_{\mathcal{S}}$

- b.) Determine $M_{\mathcal{R}} \wedge M_{\mathcal{S}}$
- c.) Determine $M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{S}}$
- d.) Use operaciones con matrices booleanas para determinar la matriz asociada la relación $\mathcal{S}^{-1} \circ \overline{\mathcal{R}}$

Demostración de enunciados

Ejemplo 3.13 (Demostraciones de resultados).

Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones definidas de A en B .

$$1) (\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$$

$$\text{Prueba: } a(\mathcal{R}^{-1})^{-1}b \iff b\mathcal{R}^{-1}a \iff a\mathcal{R}b.$$

$$2) (\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1}$$

Prueba:

$$\begin{aligned} a(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})^{-1}b &\iff b\mathcal{R} \cup Sa \iff b\mathcal{R}a \vee bSa \iff a\mathcal{R}^{-1}b \vee a\mathcal{S}^{-1}b \\ &\iff a\mathcal{R}^{-1} \cup \mathcal{S}^{-1}b \end{aligned}$$

$$3) (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}^{-1}$$

Prueba: Ejercicio

$$4) (\mathcal{R} - \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} - \mathcal{S}^{-1}$$

Prueba: Ejercicio

Ejemplo 3.14

Sean \mathcal{R} relación definida de A en B , y las relaciones \mathcal{S} y \mathcal{T} definidas de B en C .

Recordemos que si $\exists b \in B$ tal que $a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{S}c$ entonces $a\mathcal{S} \circ \mathcal{R}c$ (observe el orden!)

$$1) (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{S}^{-1}$$

Prueba: $S \circ \mathcal{R}$ va de A en C y $(S \circ \mathcal{R})^{-1}$ va de C en A y $\mathcal{R}^{-1} \circ S^{-1}$ va de C en A .

$$\begin{aligned} c (S \circ \mathcal{R})^{-1} a &\iff a S \circ \mathcal{R} c \iff \exists b \in B \text{ tal que } a \mathcal{R} b \wedge b S c \\ &\iff b \mathcal{R}^{-1} a \wedge c S^{-1} b \\ &\iff c S^{-1} b \wedge b \mathcal{R}^{-1} a \\ &\iff c \mathcal{R}^{-1} \circ S^{-1} a \end{aligned}$$

$$2) (S \cup \mathcal{T}) \circ \mathcal{R} = (S \circ \mathcal{R}) \cup (\mathcal{T} \circ \mathcal{R})$$

Prueba: La relación $(S \cup \mathcal{T}) \circ \mathcal{R}$ va de A en C .

$$\begin{aligned} a (S \cup \mathcal{T}) \circ \mathcal{R} c &\iff \exists b \in B \text{ tal que } a \mathcal{R} b \wedge b S \cup \mathcal{T} c \\ &\iff a \mathcal{R} b \wedge (b S c \vee b \mathcal{T} c) \\ &\iff \dots \text{Ejercicio : completar la demostracin} \end{aligned}$$

$$3) G_{(S \cap \mathcal{T}) \circ \mathcal{R}} \subseteq G_{(S \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{T} \circ \mathcal{R})}$$

Prueba: En el ejemplo 3.4 ya vimos un contraejemplo que muestra que estos dos conjuntos no son iguales. La relación $(S \cup \mathcal{T}) \circ \mathcal{R}$ va de A en C .

$$\begin{aligned} (a, c) \in G_{(S \cap \mathcal{T}) \circ \mathcal{R}} &\iff a (S \cap \mathcal{T}) \circ \mathcal{R} c \\ &\iff \exists b \in B \text{ tal que } a \mathcal{R} b \wedge b S \cap \mathcal{T} c \\ &\iff \exists b \in B \text{ tal que } (a \mathcal{R} b \wedge b S c) \wedge (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{T} c) \\ &\implies a (S \circ \mathcal{R}) c \wedge a (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) c \quad (*) \\ &\implies (a, c) \in G_{(S \circ \mathcal{R}) \cap (\mathcal{T} \circ \mathcal{R})} \end{aligned}$$

Observación. En el paso (*) solo podemos usar " \implies " porque en la otra dirección del razonamiento, no hay un " $b \in B$ " sino $b_1, b_2 \in B$. En efecto,

$$a (S \circ \mathcal{R}) c \wedge a (\mathcal{T} \circ \mathcal{R}) c \implies \begin{cases} \exists b_1 \in B \text{ tal que } a \mathcal{R} b_1 \wedge b_1 S c \\ \text{y} \\ \exists b_2 \in B \text{ tal que } a \mathcal{R} b_2 \wedge b_2 \mathcal{T} c \end{cases}$$

y no necesariamente $b_1 = b_2$, tal y como lo vimos en el ejemplo 3.4.

Ejemplo 3.15

Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones definidas de A en B .

$$1) D_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = D_{\mathcal{R}} \cup D_{\mathcal{S}}$$

Prueba:

$$\begin{aligned} a \in D_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} &\iff \exists b \in B \text{ tal que } a (\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) b \\ &\iff \exists b \in B \text{ tal que } a \mathcal{R} b \vee a \mathcal{S} b \\ &\iff a \in D_{\mathcal{R}} \vee a \in D_{\mathcal{S}} \\ &\iff a \in D_{\mathcal{R}} \cup D_{\mathcal{S}} \end{aligned}$$

$$2) D_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} \subseteq D_{\mathcal{R}} \cap D_{\mathcal{S}}$$

Prueba:

$$\begin{aligned} a \in D_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} &\iff \exists b \in B \text{ tal que } a (\mathcal{R} \cap \mathcal{S}) b \\ &\iff \exists b \in B \text{ tal que } a \mathcal{R} b \wedge a \mathcal{S} b \\ &\implies a \in D_{\mathcal{R}} \wedge a \in D_{\mathcal{S}} \quad (*) \\ &\implies a \in D_{\mathcal{R}} \cap D_{\mathcal{S}} \end{aligned}$$

Como en el ítem 3. del ejemplo 3.4, en el paso (*) no podemos ir en la otra dirección del razonamiento, pues no hay un " $b \in B$ " sino $b_1, b_2 \in B$. En efecto,

$$a \in D_{\mathcal{R}} \wedge a \in D_{\mathcal{S}} \implies \begin{cases} \exists b_1 \in B \text{ tal que } a \mathcal{R} b_1 \\ \text{y} \\ \exists b_2 \in B \text{ tal que } a \mathcal{S} b_2 \end{cases}$$

y no necesariamente $b_1 = b_2$.

Ejercicios

Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones definidas de A en B .

3.2.14 Probar que $D_{\mathcal{R} - \mathcal{S}} \subseteq D_{\mathcal{R}} - D_{\mathcal{S}}$

3.2.15 Probar que $(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})[A] \subseteq \mathcal{R}[A] \cap \mathcal{S}[A]$

3.2.1 Dígrafos (grafos dirigidos)

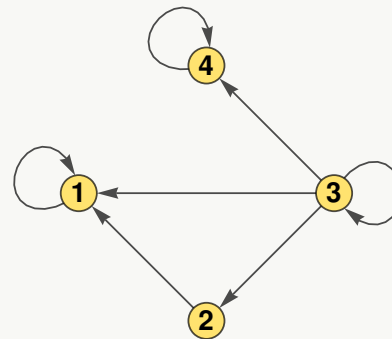
Una relación \mathcal{R} de A en A se puede representar con un grafo dirigido (llamado también dígrafo). Los nodos o vértices, son los elementos de A y las flechas o aristas, conectan (de manera dirigida) los elementos de A que se relacionan de acuerdo con la relación \mathcal{R} .

Ejemplo 3.16

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y \mathcal{R} una relación sobre A con

$$G_{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (3, 3), (2, 1), (3, 2), (3, 1), (4, 4), (3, 4)\}.$$

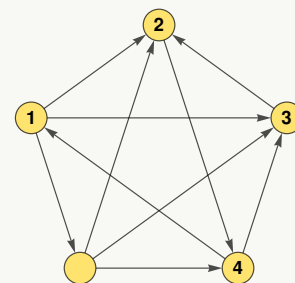
Entonces tenemos 4 nodos, 4 flechas y 3 lazos.



Ejemplo 3.17 (Torneo "round-robin")

Un torneo "round-robin" es un torneo "todos contra todos". Si no tomamos en cuenta los "marcadores", los resultados del torneo se pueden representar con un dígrafo. Consideremos cinco jugadores $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y la relación \mathcal{R} sobre A definida por $i \mathcal{R} j \iff i$ venció a j . Una posible matriz $M_{\mathcal{R}}$ (llamada matriz de adyacencia) y el dígrafo asociado se muestra a continuación

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Algunos jugadores están empatados en cantidad de victorias. Con el dígrafo podríamos visualizar las victorias directas e indirectas de cada jugador y decidir un método de desempate basado en esta consideración (sin considerar marcadores!).

Dígrafos con el language R. Una manera sencilla de generar el dígrafo a partir de la matriz de adyacencia es usar el paquete `igraph` del language **R**. El código para el ejemplo anterior es el que sigue.

■ Algoritmo 3.1: Dígrafos con R

```
install.packages("igraph") # instalar igraph (solo una vez!)
require(igraph)           # solicitar igraph
#Ver parámetros en http://kateto.net/networks-r-igraph
adj.mat=matrix(c(1,  0,  0,  0,
                 1,  0,  0,  0,
                 1,  1,  1,  1,
                 0,  0,  0,  1), nrow=4, byrow=TRUE)

g = graph.adjacency(adj.mat)
#Graph
par(bg=rgb(.99,.99,.99)) #color de fondo
plot(g, vertex.size = 30,
      vertex.color="gold",
      vertex.label.font=2, #bold
      vertex.label.cex=2, #font size
      vertex.frame.color= "white",
      vertex.label.color = "black",
      vertex.label.family = "sans",
      edge.width=4,
      edge.color="black",
      layout=layout_in_circle) #topología de nodos
```

3.3 Propiedades de las relaciones

Definición 3.9 (Reflexiva)

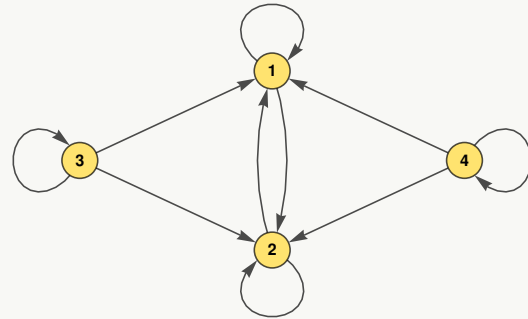
Sea \mathcal{R} una relación definida sobre A . Esta relación es reflexiva si y solo si $\forall a \in A, a \mathcal{R} a$.

Ejemplo 3.18 (Reflexiva)

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea \mathcal{R} una relación sobre A definida por

$G_{\mathcal{R}} = \{(1, 2), (2, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (3, 2), (1, 4)\}$. Entonces \mathcal{R} es reflexiva. Solo basta fijarse en la diagonal de la tabla, pues ahí aparecen los elementos (a, a) .

$G_{\mathcal{R}}$	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

**Ejemplo 3.19 (Reflexiva)**

- a.) Sea \mathcal{R} una relación sobre \mathbb{R}^* definida por $x \mathcal{R} y \iff xy > 0$. \mathcal{R} es reflexiva pues $\forall a \in \mathbb{R}^*, a \cdot a > 0 \implies a \mathcal{R} a$.
- b.) En $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ se define la relación $\mathcal{R}: (a,b) \mathcal{R} (c,d) \iff ad = bc$. La relación es reflexiva pues $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n,n) \mathcal{R} (n,n)$ ya que $n^2 = n^2$.
- c.) Sea \mathcal{R} una relación sobre \mathbb{N} definida por $a \mathcal{R} b \iff a + 1 = b$. Esta relación no es reflexiva pues, por ejemplo $2 \not\mathcal{R} 2$ pues $2 + 1 \neq 2$.
- d.) Sea E un conjunto y $H \subseteq E$. Sobre $\mathcal{P}(E)$ se define la relación \mathcal{R} por

$$A \mathcal{R} B \iff A \cap H = B \cap H$$

La relación es reflexiva: $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \mathcal{R} A$ pues $A \cap H = A \cap H$.

Definición 3.10 (Simétrica)

Sea \mathcal{R} una relación definida sobre A . Esta relación es simétrica si y solo si

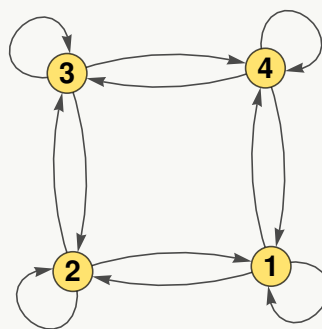
$$\forall a, b \in A, \text{ si } a \mathcal{R} b \implies b \mathcal{R} a.$$

Ejemplo 3.20 (Reflexiva y Simétrica)

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea \mathcal{R} una relación sobre A definida por

$G_{\mathcal{R}} = \{(1,2), (2,2), (2,3), (1,3), (2,1), (3,2), (1,4), (4,1)\}$. Entonces \mathcal{R} es simétrica. Observe como la diagonal opera como un “espejo”.

$G_{\mathcal{R}}$	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)



Ejemplo 3.21 (Simétrica)

- a.) Sea \mathcal{R} una relación sobre \mathbb{R}^* definida por $x \mathcal{R} y \iff xy > 0$. \mathcal{R} es simétrica pues si $a \mathcal{R} b \implies a \cdot b > 0 \implies b \cdot a > 0 \implies b \mathcal{R} a$.
- b.) En $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ se define la relación $\mathcal{R}: (a,b) \mathcal{R} (c,d) \iff ad = bc$. La relación es simétrica pues $\forall a,b,c,d \in \mathbb{N}^*$, si $(a,b) \mathcal{R} (c,d)$ entonces $ad = bc \iff cb = da$, entonces $(c,d) \mathcal{R} (a,b)$.
- c.) Sea \mathcal{R} una relación sobre \mathbb{N} definida por $a \mathcal{R} b \iff a + 1 = b$. Esta relación no es simétrica pues, por ejemplo $2 \mathcal{R} 3$ pero $3 \not\mathcal{R} 2$ pues $3 + 1 \neq 2$.
- d.) Sea E un conjunto y $H \subseteq E$. Sobre $\mathcal{P}(E)$ se define la relación \mathcal{R} por

$$A \mathcal{R} B \iff A \cap H = B \cap H$$

La relación es simétrica pues: $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, si $A \mathcal{R} B$ se tiene

$$A \cap H = B \cap H \implies B \cap H = A \cap H \text{ entonces } B \mathcal{R} A$$

Definición 3.11

Sea \mathcal{R} una relación definida sobre A .

- a.) \mathcal{R} es *antisimétrica* si y solo si $\forall a, b \in A$ se tiene que si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a$ entonces $a = b$
- b.) \mathcal{R} es *total* si y solo si $\forall a, b \in A$ se tiene que $a \mathcal{R} b \vee b \mathcal{R} a$

- Lo primero que hay que notar es que si \mathcal{R} es *total* entonces es reflexiva, pues $\forall a, a \in A$ se tiene que

$a \mathcal{R} a \vee a \mathcal{R} a$, es decir, $a \mathcal{R} a$.

Observación. Simetría y antisimetría no son nociones exactamente “opuestas”. Existen relaciones que son simétricas y antisimétricas al mismo tiempo (como la relación “=”) Existen relaciones que no son simétricas ni antisimétricas como la relación “ $a|b$ ” (“ a divide b ”) en los enteros, por ejemplo, $-2|2$ y $2|-2$ pero $-2 \neq 2$. Además si $a|b$ no necesariamente $b|a$. Otras relaciones son simétricas pero no antisimétricas (como la relación de congruencia módulo m : Dos números son congruentes módulo m si dejan el mismo residuo (positivo) al dividir por m) Otras relaciones son antisimétricas pero no simétricas (como la relación “ \leq ”).

A veces es útil ver la antisimetría desde el punto de vista de la contrapositiva:

$$\text{Es decir, si } a \neq b \text{ entonces } \neg [a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a] \equiv a \not\mathcal{R} b \vee b \not\mathcal{R} a$$

Ejemplo 3.22

a.) Sea \mathcal{R} una relación, definida sobre \mathbb{Z}^* , por la ley $a \mathcal{R} b \iff b$ divide a a , es decir, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. Esta relación no es antisimétrica pues, por ejemplo, $-2|2$ y $2|-2$ pero $-2 \neq 2$. La relación \mathcal{R} no es total pues $3 \not\mathcal{R} 5$ y $5 \not\mathcal{R} 3$

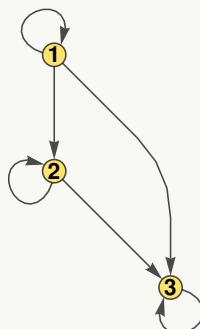
b.) Sea \mathcal{R} una relación, definida sobre \mathbb{N}^* , por la ley $a \mathcal{R} b \iff b$ divide a a , es decir, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot k$. Esta relación es antisimétrica. En efecto:

Si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a$ entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ tal que $a = b \cdot k_1$ y $b = a \cdot k_2$. Por tanto $ab = ab \cdot k_1 k_2 \implies k_1 k_2 = 1 \implies k_1 = 1 = k_2$ pues estamos en \mathbb{N}^* , es decir, $a = b$.

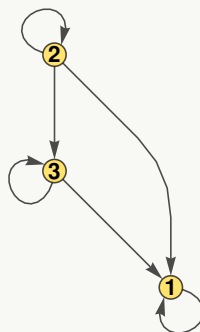
Ejemplo 3.23

Las relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} definidas sobre $A = \{1, 2, 3\}$, cuyo gráfico aparece más abajo; son antisimétricas y totales. Primero hay que notar que son reflexivas y luego, si $a \neq b$ entonces o a está relacionado con b o b está relacionado con a , pero no las dos posibilidades.

$G_{\mathcal{R}}$	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)



G_S	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)

**Definición 3.12 (Transitiva)**

Sea \mathcal{R} una relación definida sobre A . Esta relación es transitiva si y solo si

$$\forall a, b, c \in A, \text{ si } a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies a \mathcal{R} c.$$

Ejemplo 3.24 (Reflexiva y transitiva)

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea \mathcal{R} una relación sobre A definida por

$$G_{\mathcal{R}} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (2,1), (1,2), (1,4), (4,3), (1,3), (2,3), (2,4)\}.$$

Entonces \mathcal{R} es transitiva.

$G_{\mathcal{R}}$	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

Ejemplo 3.25

Sea \mathcal{R} una relación sobre \mathbb{R}^* definida por $x \mathcal{R} y \iff xy > 0$. \mathcal{R} es transitiva pues si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies a \cdot b > 0 \wedge b \cdot c > 0$ por lo que a y c tienen el mismo signo que b , es decir, a y c tienen el mismo signo, $\therefore a \cdot c > 0 \implies a \mathcal{R} c$

Nota: También se puede demostrar así: $a \cdot b > 0$ y $b \cdot c > 0 \implies ab^2c > 0 \implies ac > 0$ pues $b^2 > 0$.

Ejemplo 3.26

En \mathbb{Z} , si $m > 1$, la relación " \equiv_m " (congruente módulo m) se define así:

$$a \equiv b \pmod{m} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b - a = mk$$

La relación \equiv_m es transitiva pues $a \equiv_m b \wedge b \equiv_m c$ entonces $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $b - a = mk_1$ y $c - b = mk_2$. Sumando obtenemos $b - a + c - b = c - a = m(k_1 + k_2)$. Por tanto, $\exists k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $c - a = mk$, es decir, $a \equiv_m c$.

La transitividad no es tan evidente al observar el gráfico de \mathcal{R} . En el teorema que sigue tenemos una caracterización natural y práctica para establecer si una relación es reflexiva, simétrica o transitiva.

Teorema 3.4

Sea \mathcal{R} una relación definida sobre A (finito). Si $|A| = n$, entonces

- \mathcal{R} es reflexiva si y solo si $D \subseteq G_{\mathcal{R}}$ con $D = \{(a, a) \text{ tal que } a \in A\}$.
- \mathcal{R} es simétrica si y solo si $G_{\mathcal{R}} = G_{\mathcal{R}}^{-1}$
- \mathcal{R} es transitiva si y solo si $G_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}} \subseteq G_{\mathcal{R}}$

Prueba. Solo haremos la prueba de la c.). Esta equivalencia de demuestra en dos direcciones.

" \implies ". **Hipótesis:** \mathcal{R} es transitiva. Hay que mostrar la inclusión $G_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}} \subseteq G_{\mathcal{R}}$.

$$\begin{aligned} (a, c) \in G_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}} &\implies \exists b \in A \text{ tal que } a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c, \\ &\implies \text{como } \mathcal{R} \text{ es transitiva, } a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies a \mathcal{R} c \\ &\implies (a, c) \in G_{\mathcal{R}}. \end{aligned}$$

" \impliedby ". **Hipótesis:** $G_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}} \subseteq G_{\mathcal{R}}$. Hay que mostrar que \mathcal{R} es transitiva.

Vamos directo a la definición de transitividad y usaremos la hipótesis en el camino.

Si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies (a, c) \in G_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}}$ y por tanto $(a, c) \in G_{\mathcal{R}}$ por hipótesis. $\therefore a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies a \mathcal{R} c$.

Ejemplo 3.27

Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones definidas sobre un conjunto no vacío A . Demuestre que si \mathcal{R} y \mathcal{S} son relaciones simétricas y si $\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$, entonces $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ es simétrica.

Solución:

Hipótesis: \mathcal{R} y \mathcal{S} son relaciones simétricas

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$$

Hay que demostrar que: $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ es simétrica

$$\begin{aligned} G_{(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})^{-1}} &= G_{\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}^{-1}} \\ &= G_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}}, \text{ pues ambas relaciones son simétricas} \\ &= G_{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}}, \text{ por hipótesis.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3.28

Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones definidas en $A \neq \emptyset$ tal que $G_{\mathcal{R}} \subseteq G_{\mathcal{S}}$.

1) Muestre que si \mathcal{R} es reflexiva, entonces \mathcal{S} es reflexiva

Solución:

Hipótesis: \mathcal{R} es reflexiva y $G_{\mathcal{R}} \subseteq G_{\mathcal{S}}$.

Hqm: \mathcal{S} es reflexiva, es decir, $D \subseteq G_{\mathcal{S}}$

$$\begin{aligned} \text{Como } \mathcal{R} \text{ es reflexiva} &\implies D \subseteq G_{\mathcal{R}} \\ &\implies D \subseteq G_{\mathcal{S}} \text{ pues } G_{\mathcal{R}} \subseteq G_{\mathcal{S}} \\ \therefore &\mathcal{S} \text{ es reflexiva} \end{aligned}$$

2) Dé un contraejemplo de la afirmación “si \mathcal{R} es simétrica, entonces \mathcal{S} es simétrica”

Solución:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$G_{\mathcal{R}} = \{ (1, 2), (2, 1) \} \quad \therefore \mathcal{R} \text{ es simétrica}$$

$$G_{\mathcal{S}} = \{ (1, 2), (2, 1), (3, 1) \} \quad G_{\mathcal{R}} \subseteq G_{\mathcal{S}} \text{ pero } \mathcal{S} \text{ no es simétrica pues } 3 \mathcal{S} 1 \text{ pero } 1 \not\mathcal{S} 3$$

El teorema 3.4 se puede plantear en términos de matrices asociadas.

Definición 3.13

Si $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{n \times m}$ son matrices booleanas, entonces

$$A \leq B \iff a_{ij} \leq b_{ij} \forall i, j$$

Teorema 3.5

Sea \mathcal{R} una relación definida sobre A (finito). Si $|A| = n$, entonces

- \mathcal{R} es reflexiva si y solo si $I_n \leq M_{\mathcal{R}}$.
- \mathcal{R} es simétrica si y solo si $M_{\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}}^T$.
- \mathcal{R} es transitiva si y solo si $M_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}} \leq M_{\mathcal{R}}$.

Ejemplo 3.29

Considere la relación \mathcal{R} sobre $A = \{a, b, c\}$ con matriz asociada $M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Entonces

- \mathcal{R} no es reflexiva pues $I_3 \not\leq M_{\mathcal{R}}$ (la diagonal no tiene todos sus 1's).
- \mathcal{R} es simétrica pues $M_{\mathcal{R}} = M_{\mathcal{R}}^T$.

- \mathcal{R} no es transitiva pues $M_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \not\leq M_{\mathcal{R}}$. ¿Dónde falla la transitividad?.

Por ejemplo, de la matriz $M_{\mathcal{R}}$ observamos que $c \mathcal{R} b$ y $b \mathcal{R} c$
 $c \not\mathcal{R} c$.

Ejercicios

3.3.1 Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones definidas sobre el conjunto A , con $A \neq \emptyset$. Demuestre que si \mathcal{R} es antisimétrica, entonces $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}$ es antisimétrica.

3.3.2 Considere la relación \mathcal{R} definida sobre un conjunto $A \neq \emptyset$.

- 1) Demuestre que $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ es simétrica.
- 2) ¿Qué condiciones se requieren para que $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ sea reflexiva?

(R) 3.3.3 Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} dos relaciones definidas sobre un conjunto A , $A \neq \emptyset$. Si \mathcal{R} es transitiva y se cumple que $a(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})b$ y $b\mathcal{R}c$, demuestre entonces que $a[\mathcal{R} \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{S})]c$.

(R) 3.3.4 Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} dos relaciones definidas sobre un conjunto A , $A \neq \emptyset$. Demuestre que si $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es transitiva, entonces $G_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} \subseteq G_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$.

(R) 3.3.5 Sea \mathcal{R} una relación definida sobre A , con A no vacío. Demuestre que si \mathcal{R} es transitiva, entonces $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}$ es transitiva. Además, verifique que el recíproco de la proposición anterior no es verdadero.

(R) 3.3.6 Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} dos relaciones definidas sobre un conjunto A , con A no vacío. Si se sabe que \mathcal{R} es transitiva y \mathcal{S} es simétrica, demuestre que si $a(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})b \wedge b\mathcal{R}c$, entonces $b(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})c$.

(R) 3.3.7 Si \mathcal{R} y \mathcal{S} son dos relaciones definidas sobre un conjunto A , con A no vacío:

- 1) Pruebe que si \mathcal{R} y \mathcal{S} son reflexivas, entonces $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ es reflexiva.
- 2) Si \mathcal{R} y \mathcal{S} son antisimétricas, determine si $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es antisimétrica.

(R) 3.3.8 Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y sea la relación \mathcal{R} sobre A , de gráfico

$$G_{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 1), (1, 3)\}.$$

Determine la matriz asociada a \mathcal{R} y use el teorema 3.5 para verificar que \mathcal{R} reflexiva, simétrica y transitiva.

(R) 3.3.9 Sea \mathcal{R} una relación con matriz asociada $M_{\mathcal{R}}$. Use el teorema 3.5 para determinar si \mathcal{R} es transitiva.

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.4 Relaciones de equivalencia

Las relaciones de equivalencia son relaciones que generalizan relaciones tales como la relación “=” o la relación “ \sim ” (“es similar”) en geometría plana. Estas relaciones tienen tres propiedades muy conocidas

- a.) **Reflexividad:** $\forall a \in \mathbb{R}, a = a$

b.) **Simetría:** $\forall a, b \in \mathbb{R}, a = b \implies b = a$

c.) **Transitividad:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a = b \wedge b = c \implies a = c$

Definición 3.14 (Relación de equivalencia)

Una relación \mathcal{R} sobre A es de equivalencia si y solo si \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.

Para una relación \mathcal{R} de equivalencia, si $a \mathcal{R} b$, entonces formalmente, desde el punto de \mathcal{R} , los objetos a y b son “de la misma clase” o “esencialmente similares” o también “congruentes”. A veces se escribe $a \equiv_{\mathcal{R}} b$ en vez de $a \mathcal{R} b$. Los elementos que están relacionados se agrupan en “clases de equivalencia” y cualquier objeto de la clase puede ser representante de la clase. Esta idea es muy provechosa porque, si \mathcal{R} es una relación de equivalencia sobre A , en vez de analizar todo A , podemos solo analizar el conjunto de las “clases de equivalencia”; este conjunto es llamado “conjunto cociente” porque se escribe “ A/\mathcal{R} ”

Definición 3.15 (Clases y conjunto cociente)

Si la relación \mathcal{R} sobre A es de equivalencia, entonces todo elemento $a \in A$ está en una “clase de equivalencia”, denotada \dot{a} o también $[a]$. Esta clase se define como

$$\dot{a} = [a] = \{b \in A \text{ tal que } a \mathcal{R} b\}$$

El “conjunto cociente” es el conjunto de las clases de equivalencia y se denota A/\mathcal{R} .

$$A/\mathcal{R} = \{\dot{a} \text{ tal que } a \in A\}$$

A veces en vez de \dot{a} se usa la notación $[a]$ o también \bar{a} .

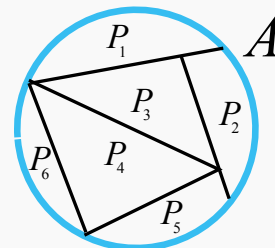
Teorema 3.6

Sea \mathcal{R} una relación de equivalencia sobre A . Si $a \mathcal{R} b$ entonces $\dot{a} = \dot{b}$

Definición 3.16 (Partición)

Sea A un conjunto. Un conjunto $P \subseteq \mathcal{P}(A)$ es una *partición* de A si y solo si

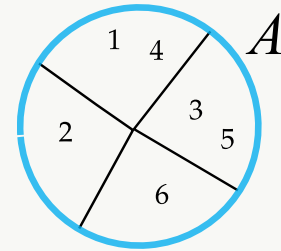
- $S \neq \emptyset \forall S \in P$.
- $\forall S, T \in P, \text{ si } S \neq T \implies S \cap T = \emptyset$
- La unión de todos los elementos de P es A .



Ejemplo 3.30 (Particiones)

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Los siguientes conjuntos son particiones de A

- a.) $P = \{\{1, 4\}, \{3, 5\}, \{2\}, \{6\}\}$
 b.) $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3, 5\}, \{4\}, \{6\}\}$

**Teorema 3.7**

Si \mathcal{R} una relación de equivalencia sobre A , entonces el conjunto cociente A/\mathcal{R} es una *partición* de A . Si \mathcal{T} es una partición de A , existe una relación de equivalencia \mathcal{R} sobre A tal que $A/\mathcal{R} = \mathcal{T}$

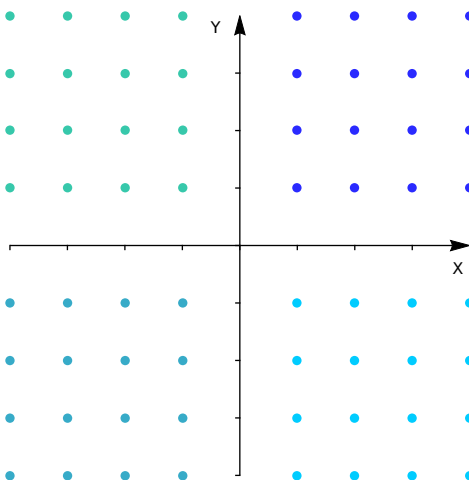
Prueba: Ejercicio.

De acuerdo al teorema, dada un partición de A , existe una relación de equivalencia que induce esa partición. Entonces

- a.) Existe una relación de equivalencia que particiona \mathbb{Z} en pares e impares.
 b.) Existe una relación de equivalencia que particiona \mathbb{R}^* en positivos y negativos
 c.) Existe una relación de equivalencia que particiona \mathbb{Z} en “paquetes” de dos elementos, por ejemplo

$$\mathbb{Z} = \{ \dots \{-2, 12\}, \{-1, 11\}, \{0, 10\}, \{1, 9\}, \dots \}$$

- d.) Existe una relación de equivalencia que particiona $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ en cuadrantes



Ejemplo 3.31

Sobre $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se tiene una relación de equivalencia \mathcal{R} , de gráfico

$$G_{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (5, 1), (1, 5), (5, 5), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (6, 6)\}.$$

Determine la partición (el conjunto cociente) inducida por esta relación.

Solución: Para obtener la partición revisamos las filas del gráfico (en configuración cartesiana) para determinar qué elementos están relacionados con cada elemento de A .

$G_{\mathcal{R}}$	1	2	3	4	5	6	Clases
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	$\rightarrow [1] = \{1, 5\}$
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	$\rightarrow [2] = \{2, 3, 4\}$
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	$\rightarrow [3] = [2]$
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	$\rightarrow [4] = [2]$
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)	$\rightarrow [5] = [1]$
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)	$\rightarrow [6] = \{6\}$

La partición sería $A / \mathcal{R} = \{ \{1, 5\}, \{2, 3, 4\}, \{6\} \}$

Ejemplo 3.32

Verifique que $P = \{ \{1, 4\}, \{3, 5\}, \{2\}, \{6\} \}$ es una partición de $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y determine el gráfico de la relación inducida sobre A .

Solución: P es una partición de A pues satisface la definición 3.16.

La relación inducida sobre A debe ser *de equivalencia*, según el teorema 3.7. Por lo tanto en su gráfico debe estar la diagonal D y debe ser simétrico.

$G_{\mathcal{R}}$	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Los objetos de A que se relacionan son los elementos de cada elemento de la partición. Como $\{1, 4\}$ está en la partición, eso significa que $(1, 1), (1, 4), (4, 4) \in G_{\mathcal{R}}$.

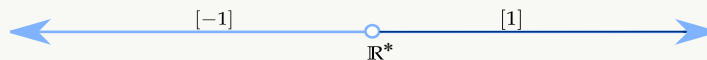
Ejemplo 3.33

Sea \mathcal{R} una relación sobre \mathbb{R}^* definida por $x \mathcal{R} y \iff xy > 0$.

- Muestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- Determine las clases de equivalencia $[1]$ y $[-1]$.
- Determine $\mathbb{R}^* / \mathcal{R}$ (el conjunto cociente).

Solución:

- \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
 - \mathcal{R} es reflexiva pues $\forall a \in \mathbb{R}^*, a \cdot a > 0 \implies a \mathcal{R} a$.
 - \mathcal{R} es simétrica pues si $a \mathcal{R} b \implies a \cdot b > 0 \implies b \cdot a > 0 \implies b \mathcal{R} a$
 - \mathcal{R} es transitiva pues si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies a \cdot b > 0 \wedge b \cdot c > 0$ por lo que a y c tienen el mismo signo que b , es decir, a y c tienen el mismo signo, $\therefore a \cdot c > 0 \implies a \mathcal{R} c$
Nota: También se puede demostrar así: $a \cdot b > 0$ y $b \cdot c > 0 \implies ab^2c > 0 \implies ac > 0$ pues $b^2 > 0$.
- $[1] = \{a \in \mathbb{R}^* \text{ tal que } a \cdot 1 > 0\} \implies [1] = \mathbb{R}^+$. $[-1] = \{a \in \mathbb{R}^* \text{ tal que } a \cdot (-1) > 0\} \implies [-1] = \mathbb{R}^-$.
- Como $[1] \cup [-1] = \mathbb{R}^*$ entonces $\mathbb{R}^* / \mathcal{R} = \{[1], [-1]\}$.

**Ejemplo 3.34**

En \mathbb{Z} , si $m > 1$, la relación “congruentes módulo m ” se define así: a y b son “congruentes módulo m ” si y solo si $m \mid (b - a)$, es decir, m divide a $b - a$. Se escribe $a \equiv b \pmod{m}$ o también $a \equiv_m b$.

$$a \equiv b \pmod{m} \iff m \mid (b - a) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b - a = mk$$

Por ejemplo

- Si $m = 2$ entonces $5 \equiv 7 \pmod{2}$ pues $7 - 5 = 2 \cdot 1$
- Si $m = 5$ entonces $27 \equiv 7 \pmod{5}$ $27 - 7 = 5 \cdot 4$.

- Demuestre que esta relación es de equivalencia (el conjunto cociente se denota \mathbb{Z}_m).

b.) Si $m = 2$, determine el conjunto cociente " \mathbb{Z}_2 "

Solución:

a.) La relación es de equivalencia.

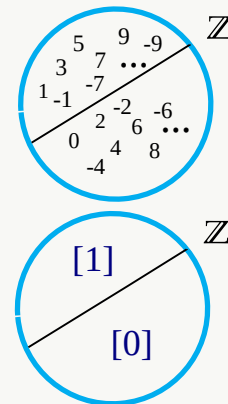
- i.) **Reflexiva:** $\forall a \in \mathbb{Z}, a - a = m \cdot 0$, es decir, $a \equiv_m a$.
- ii.) **Simetría:** Si $a \equiv_m b \implies \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $b - a = mk \implies a - b = m(-k)$, por tanto $b \equiv_m a$
- iii.) **Transitiva:** $a \equiv_m b \wedge b \equiv_m c$ entonces $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $b - a = mk_1$ y $c - b = mk_2$. Sumando obtenemos $c - a = m(k_1 + k_2)$. Por tanto, $\exists k = k_1 + k_2 \in \mathbb{Z}$ tal que $c - a = mk$, es decir, $a \equiv_m c$.

b.) Si $m = 2$ entonces

$$\begin{aligned} [0] &= \{a \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a \equiv 0 \pmod{2}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = 2k\}, \text{ es decir, los pares} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1] &= \{a \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a \equiv 1 \pmod{2}\} \\ &= \{a \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = 2k + 1\}, \text{ es decir, los impares} \end{aligned}$$

Como $[0] \cup [1] = \mathbb{Z} \implies \mathbb{Z}_2 = \{[0], [1]\}$



Ejemplo 3.35

Sea \mathcal{R} sobre \mathbb{R}^* definida por $a \mathcal{R} b \iff a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}$.

1) \mathcal{R} es de equivalencia

(a) **Reflexiva:** $\forall a \in \mathbb{R}^*, a + \frac{1}{a} = a + \frac{1}{a} \implies a \mathcal{R} a$

(b) **Simétrica:** $\forall a, b \in \mathbb{R}^*, \text{ si } a \mathcal{R} b \implies a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} \implies b + \frac{1}{b} = a + \frac{1}{a} \implies b \mathcal{R} a$

(c) **Transitiva:** $\forall a, b, c \in \mathbb{R}^*, \text{ si } a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b} \wedge b + \frac{1}{b} = c + \frac{1}{c}$,
entonces $a + \frac{1}{a} = c + \frac{1}{c}$, es decir, $a \mathcal{R} c$

2) $[\frac{1}{2}] = \{b \in \mathbb{R}^* \text{ tal que } \frac{1}{2} \mathcal{R} b\}$. Si $\frac{1}{2} \mathcal{R} b \implies \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = b + \frac{1}{b} \implies \frac{-2b^2 + 5b - 2}{2b} =$

$$0 \implies b = \frac{1}{2} \vee b = 2$$

$$\therefore \left[\frac{1}{2} \right] = \left\{ \frac{1}{2}, 2 \right\}$$

Ejemplo 3.36

En $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ se define la relación $\mathcal{R}: (a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff ad = bc$
 Verifique que es de equivalencia y determine las clases $[(2, 2)]$ y $[7, 4]$.

Solución:

a.) Es de equivalencia

i.) **Reflexiva:** $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n, n) \mathcal{R} (n, n)$ pues $n^2 = n^2$.

ii.) **Simétrica:** $\forall a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, si $(a, b) \mathcal{R} (c, d)$ entonces $ad = bc \iff cb = da$, entonces $(c, d) \mathcal{R} (a, b)$

iii.) **Transitividad:** $\forall a, b, c, d, p, q \in \mathbb{N}^*$, si $(a, b) \mathcal{R} (c, d) \wedge (c, d) \mathcal{R} (p, q)$ entonces $ad = bc \wedge cq = dp$.

Como $adcq = bc dp$ entonces $aq = bp$ (la cancelación es posible porque $cd \neq 0$). $\therefore (a, b) \mathcal{R} (p, q)$

b.) $[(2, 2)] = \{ (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ tal que } 2a = 2b \} = \{ (a, a) \text{ tal que } a \in \mathbb{N}^* \}$

$[(7, 4)] = \{ (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ tal que } 7b = 4a \} = \{ (a, \frac{4a}{7}) \text{ tal que } a \in \mathbb{N}^* \}$

Ejemplo 3.37

Sea E un conjunto y $H \subseteq E$. Sobre $\mathcal{P}(E)$ se define la relación \mathcal{R} por

$$A \mathcal{R} B \iff A \cap H = B \cap H$$

a.) Demuestre que esta relación es de equivalencia

b.) Si $E = \{a, b, c\}$ y $H = \{a, b\}$, Determine el conjunto cociente " $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ "

c.) En el caso general, ¿cuáles son las clases de equivalencia de \mathcal{R} ?

Solución:

a.) Es de equivalencia

i.) **Reflexiva:** $\forall A \in \mathcal{P}(E), A \mathcal{R} A$ pues $A \cap H = A \cap H$.

ii.) **Simétrica:** $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, si $A \mathcal{R} B$ se tiene $A \cap H = B \cap H \implies B \cap H = A \cap H$ entonces $B \mathcal{R} A$

iii.) **Transitividad:** $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, si $A \mathcal{R} B \wedge B \mathcal{R} C$, se tiene $A \cap H = B \cap H = C \cap H$ entonces $A \mathcal{R} C$

b.) Si $E = \{a, b, c\}$ y $H = \{a, b\}$, Determine el conjunto cociente " $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ "

Tenemos $\mathcal{P}(E) = \{ \{ \}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \}$. Hay tres clases (de equivalencia) en $\mathcal{P}(E)$:

i.) Los elementos de $\mathcal{P}(E)$ que contienen a $H = \{a, b\}$

$$[H] = \{ \{a, b\}, \{a, b, c\} \}$$

ii.) Los elementos de $\mathcal{P}(E)$ disjuntos de H

$$[\emptyset] = \{ \emptyset, \{c\} \}$$

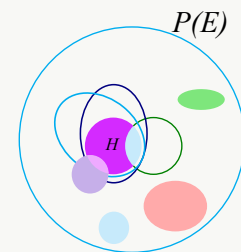
iii.) Los elementos de $\mathcal{P}(E)$ que contienen un único elemento de $\mathcal{P}(H)^* = \mathcal{P}(H) - \{\emptyset, H\}$ (solo intersecan a H en subconjunto estricto y no vacío de H). Para obtener estos elementos hacemos lo siguiente: Cada $H_i \in \mathcal{P}(H)^*$ lo agregamos a cada uno de los elementos de la clase $[\emptyset]$, de esta manera obtenemos una clase con elementos de $\mathcal{P}(E)$ cuya intersección con H es este H_i y por eso están relacionados.

Combinar $\mathcal{P}(H)^* = \{ \{a\}, \{b\} \}$ con $[\emptyset] = \{ \emptyset, \{c\} \}$ nos produce dos clases:

$$[\{a\}] = \{ \{a\}, \{c, a\} \} \text{ y } [\{b\}] = \{ \{b\}, \{c, b\} \}$$

Finalmente, $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R} = \{ [H], [\emptyset], [\{a\}], [\{b\}] \}$ y es una partición de $\mathcal{P}(E)$.

c.) En el caso general, ¿cuáles son las clases de equivalencia de " $\mathcal{P}(E)/\mathcal{R}$ "?. La respuesta está en el ítem anterior. Solo falta hacer una prueba formal. Queda como ejercicio.



Ejercicios

3.4.1 Sobre $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ se define la relación \mathcal{R} , por:

$$a \mathcal{R} b \iff (\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = b + 4k)$$

- 1) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- 2) Determine la clase de equivalencia de 2.
- 3) Calcule el conjunto cociente \mathbb{Z}/\mathcal{R} .

3.4.2 En \mathbb{Z} se define la relación \mathcal{R} como: $a \mathcal{R} b \iff [a = b \vee a + b = 12]$.

- 1) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- 2) Determine el conjunto cociente \mathbb{Z}^+/\mathcal{R}

3.4.3 Sobre \mathbb{Q} se define la relación $x \mathcal{R} y \iff \left[\exists h \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = y + \frac{h}{5} \right]$.

- 1) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- 2) Calcule la clase de equivalencia de $\frac{1}{2}$ y encuentre tres elementos de esta clase.

3.4.4 En \mathbb{Z} se define la relación \mathcal{R} tal que $a \mathcal{R} b \iff [a = b \vee a + b = 8]$.

- 1) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- 2) Determine la clase de equivalencia de -10 .

3.4.5 En una academia de lenguas, Juan, Ana, Mario, Pedro, Inés y María estudian francés y Marco, Cindy, Emily, Tomás, Carlos, Manuel, Felipe y Héctor estudian inglés. Sobre el conjunto U formado por los estudiantes de esta academia se definen dos relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} , de manera que $a \mathcal{R} b$ si y solo si a y b estudian el mismo idioma y $a \mathcal{S} b$ si y solo si a y b son del mismo sexo. Si ambas relaciones son de equivalencia, determine el conjunto cociente determinado por la relación $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.

3.4.6 En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}: (a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff [2(a - c) = 5(b - d)]$.

- 1) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- 2) Calcule tres elementos que pertenecen a la clase de equivalencia de $(2, -3)$.

3.4.7 En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se define la relación $\mathcal{R}: (a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff [3(a - c) = 2(b - d)]$. Analice qué propiedades satisface la relación \mathcal{R} y clasifique esta relación.

3.4.8 Sea A un conjunto. Sobre $\mathcal{P}(A)$ se define la relación \mathcal{R} de manera que $M \mathcal{R} N$ si y solo si $|M| = |N|$.

- 1) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- 2) Si $A = \{a, b, c, d\}$, calcule la clase de equivalencia de $\{a, c\}$.

3.4.9 Sea $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. Considere la relación \mathcal{R} definida sobre $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de la siguiente manera:

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \text{ si y solo si } a + d = b + c$$

Si se sabe que \mathcal{R} es de equivalencia, determine la clase de equivalencia de $(1, 9)$.

3.4.10 Considere la relación \mathcal{R} definida sobre \mathbb{Z} de la siguiente manera:

$$a \mathcal{R} b \iff a^2 + b = b^2 + a$$

- 1) Demuestre que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.
- 2) Calcule la clase de equivalencia $\dot{1}$.

3.4.11 Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y sea \mathcal{R} una relación de gráfico $G_{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots\}$. Verifique que \mathcal{R} es una relación de equivalencia.

3.4.12 Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y sea \mathcal{R} una relación de gráfico

$$G_{\mathcal{R}} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (b, a), (a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)\}$$

Determine si \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y/o transitiva.

3.4.13 Considere la relación \mathcal{R} sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, definida por $(x, y) \mathcal{R} (z, w) \iff x + z \leq y + w$. ¿Es \mathcal{R} una relación de equivalencia?

3.4.14 En \mathbb{Z} se define la relación $\mathcal{R}: a \mathcal{R} b \iff a = b \vee a + b = 10$

- Demuestre que esta relación es de equivalencia
- Hacer una representación gráfica de la relación
- Determine el conjunto cociente " \mathbb{Z} / \mathcal{R} "

3.4.15 En $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ se define la relación $\mathcal{R}: (a, b) \mathcal{R} (c, d) \iff ac > 0 \wedge bd > 0$

- Demuestre que esta relación es de equivalencia
- Hacer una representación gráfica de la relación y determine el conjunto cociente " $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* / \mathcal{R}$ "

3.4.16 En \mathbb{N} se define la relación $\mathcal{R}: x \mathcal{R} y \iff x + y \in \{2n : n \in \mathbb{N}\}$

- Demuestre que esta relación es de equivalencia
- Determine el conjunto cociente " \mathbb{N} / \mathcal{R} "

3.4.17 En \mathbb{Q} se define la relación $\mathcal{R}: \forall a, b \in \mathbb{Q} \quad a \mathcal{R} b \iff \exists k \in \mathbb{Z} : b = 2^k a$

- Demuestre que esta relación es de equivalencia
- Determine las clases $\dot{0}$ y $\dot{1}$

3.4.18 Sea E un conjunto y $H \in \mathcal{P}(E) - \{\emptyset\}$. Sobre $\mathcal{P}(E)$ se define la relación \mathcal{R} por

$$A \mathcal{R} B \iff [A \cap H = B \cap H = \emptyset] \vee [A \cap H \neq \emptyset \wedge B \cap H \neq \emptyset]$$

- Demuestre que esta relación es de equivalencia
- Si $E = \{a, b, c\}$ y $H = \{a, b\}$, Determine el conjunto cociente " $\mathcal{P}(E) / \mathcal{R}$ "

3.4.19 Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- a.) Sea \mathcal{R} sobre A , de gráfico $G_{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$. \mathcal{R} es de equivalencia (puede verificarlo usando el teorema 3.5). Determine el conjunto cociente A/\mathcal{R} (una partición de A).
- b.) Sea \mathcal{R} sobre A , de gráfico $G_{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 1), (1, 3)\}$. \mathcal{R} es de equivalencia (puede verificarlo usando el teorema 3.5). Determine el conjunto cociente A/\mathcal{R} (una partición de A).
- c.) Sea \mathcal{R} sobre B , de gráfico

$$G_{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (1, 4), (2, 2), (2, 5), (3, 3), (3, 6), (4, 1), (4, 4), (5, 2), (5, 5), (6, 3), (6, 6)\}.$$

\mathcal{R} es de equivalencia (puede verificarlo usando el teorema 3.5). Determine el conjunto cociente B/\mathcal{R} (una partición de A).

3.4.20 Sea $A = \{ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \}$. Sea \mathcal{R} una relación sobre A , definida por el criterio $S \mathcal{R} T$ si y solo si el elemento mínimo de S es igual al elemento mínimo de T . Sabiendo que \mathcal{R} es una relación de equivalencia, determine el conjunto cociente A/\mathcal{R} .

3.5 Relaciones de orden

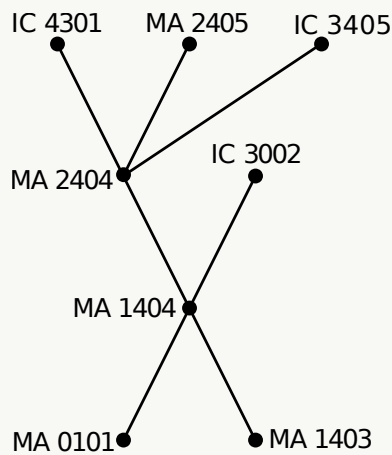
La noción intuitiva de “orden” se puede estudiar usando relaciones binarias. La idea es establecer un marco formal para poder describir nociones tales como “ a es sucesor de b ” o “ b precede a a ”.

Ejemplo 3.38

Consideremos la relación de orden “Es requisito de”, definida sobre un subconjunto C de los cursos de la carrera de Ingeniería en Computación

$$C = \{ \text{MA 0101, MA 1403, MA 1404, MA 2404, IC 3002, IC 4301, MA 2405, IC 3405} \}$$

Esta relación define una “relación de orden” en el conjunto C ¹. Una representación con un organigrama deja visualizar como la relación ordena al conjunto C



¹Formalmente, debemos asumir que cada curso es requisito de sí mismo.

La relación de orden más conocida es posiblemente la relación " \leq " sobre \mathbb{R} . Esta relación tiene tres propiedades muy bien establecidas,

- Reflexiva:** $\forall a \in \mathbb{R}, a \leq a$
- Antisimétrica:** Si $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \wedge b \leq a \implies a = b$
- Transitiva:** Si $a, b, c \in \mathbb{R}, a \leq b \wedge b \leq c \implies a \leq c$

Adicionalmente, $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \vee b \leq a$

Una relación de orden \mathcal{R} es una generalización de la relación " \leq ". En vez de escribir $a \mathcal{R} b$, a veces se escribe $a \preceq b$. Como tal, las relaciones de orden tiene las tres propiedades anteriores.

- Reflexiva:** $a \preceq a$
- Antisimétrica:** Si $a \preceq b \wedge b \preceq a \implies a = b$
- Transitiva:** Si $a \preceq b \wedge b \preceq c \implies a \preceq c$

Un conjunto con un orden parcial \preceq definido sobre él, se llama *un conjunto parcialmente ordenado* o simplemente un conjunto ordenado. La relación es un orden total si adicionalmente $\forall a, b \in A, a \preceq b \vee b \preceq a$

Definición 3.17

Sea \mathcal{R} una relación definida sobre A .

- \mathcal{R} es *antisimétrica* si y solo si $\forall a, b \in A$ se tiene que si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a$ entonces $a = b$
- \mathcal{R} es *total* si y solo si $\forall a, b \in A$ se tiene que $a \mathcal{R} b \vee b \mathcal{R} a$

Observación. Simetría y antisimetría no son nociones "opuestas".

- Existen relaciones que son simétricas y antisimétricas al mismo tiempo (como la relación “=”)
- Existen relaciones que no son simétricas ni antisimétricas como la relación “divide a” en los enteros, por ejemplo, $-2|2$ y $2|-2$ pero $-2 \neq 2$. Además si $a|b$ no necesariamente $b|a$.
- Otras relaciones son simétricas pero no antisimétricas (como la relación de congruencia módulo n)
- Otras relaciones son antisimétricas pero no simétricas (como la relación “ \leq ”).

A veces es útil ver la antisimetría desde el punto de vista de la contrapositiva:

$$\text{Es decir, si } a \neq b \text{ entonces } \neg [a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a] \equiv a \mathcal{R} b \vee b \mathcal{R} a$$

Ejemplo 3.39

a.) Sea \mathcal{R} una relación, definida sobre \mathbb{Z}^* , por la ley $a \mathcal{R} b \iff b$ divide a a , es decir, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z}$. Esta relación no es antisimétrica pues, por ejemplo, $-2|2$ y $2|-2$ pero $-2 \neq 2$.

b.) Sea \mathcal{R} una relación, definida sobre \mathbb{N}^* , por la ley $a \mathcal{R} b \iff b$ divide a a , es decir, $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b \cdot k$. Esta relación es antisimétrica. En efecto:

Si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a$ entonces existen $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ tal que $a = b \cdot k_1$ y $b = a \cdot k_2$. Por tanto $ab = ab \cdot k_1 k_2 \implies k_1 k_2 = 1 \implies k_1 = 1 = k_2$ pues estamos en \mathbb{N}^* , es decir, $a = b$.

Teorema 3.8

Sea \mathcal{R} una relación definida sobre A con matriz asociada $M_{\mathcal{R}}$

- \mathcal{R} es antisimétrica si y solo $M_{\mathcal{R}}^T \wedge M_{\mathcal{R}} \leq I_n$
- \mathcal{R} es total si y solo $M_{\mathcal{R}}^T \vee M_{\mathcal{R}} = \mathbb{1}_n$ (matriz con todas sus entradas con 1.)

Ejemplo 3.40

Sea \mathcal{R} definida sobre un conjunto A de cardinalidad 3. Se sabe que $M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{bmatrix}$.

Determine x, y, z de tal manera \mathcal{R} sea antisimétrica.

Solución: Como \mathcal{R} sea antisimétrica, si $a \neq b$ entonces $\neg [a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a] \equiv a \mathcal{R} b \vee b \mathcal{R} a$

Supongamos que $A = \{a, b, c\}$. Tenemos $M_{\mathcal{R}} = \begin{matrix} & a & b & c \\ a & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$. Entonces,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Como } a \mathcal{R} b \wedge a \neq b, \implies b \mathcal{R} a \implies x = 0 \\ \text{Como } a \mathcal{R} c \wedge a \neq c, \implies c \mathcal{R} a \implies z = 0 \\ \text{Como } b \mathcal{R} c, \text{ no hay problema si } c \mathcal{R} b \text{ o si } c \mathcal{R} b \implies y = 0 \vee y = 1 \end{array} \right.$$

Otra manera: \mathcal{R} es antisimétrica si y solo $M_{\mathcal{R}}^T \wedge M_{\mathcal{R}} \leq I_n$. Entonces

$$M_{\mathcal{R}}^T \wedge M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ z & y & 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies x = 0, z = 0 \text{ y } y = 0 \text{ o } y = 1.$$

Ejemplo 3.41

Consideremos tres relaciones sobre $A = \{1, 2, 3\}$, con matrices $M_{\mathcal{R}}$, $M_{\mathcal{S}}$ y $M_{\mathcal{T}}$

$$\begin{array}{ccc} M_{\mathcal{R}} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & M_{\mathcal{S}} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} & M_{\mathcal{T}} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{array}$$

La relación \mathcal{R} es de equivalencia. \mathcal{S} es antisimétrica pues $M_{\mathcal{S}}^T \wedge M_{\mathcal{S}} \leq I_n$. En $M_{\mathcal{S}}$, como $2 \neq 1$ entonces si aparece $(1, 2)$ no puede aparecer $(2, 1)$ por la propiedad antisimétrica. Además \mathcal{S} no es total, pues $1 \mathcal{S} 3$ y $3 \mathcal{S} 1$. En cambio $M_{\mathcal{T}}$ es antisimétrica y total.

Definición 3.18

Sea \mathcal{R} una relación definida sobre A .

- \mathcal{R} es *preorden* si y solo si \mathcal{R} es reflexiva y transitiva.
- \mathcal{R} es un *orden parcial* u "orden sobre A " si y solo si \mathcal{R} es reflexiva, transitiva y antisimétrica.
- \mathcal{R} es un *orden total* si y solo si \mathcal{R} es reflexiva, transitiva, antisimétrica y total.

Ejemplo 3.42

Considere la relación " \preceq " definida sobre $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ con gráfico

$$G_{\mathcal{R}} = A = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (6, 3), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

a.) Esta relación es de orden.

I.) **Reflexiva**: La diagonal D está contenida en \mathcal{R} : $D \subseteq G_{\mathcal{R}}$

II.) **Antisimétrica** : Podemos usar el teorema 3.8. Hay que mostrar que $M_{\preceq}^T \wedge M_{\preceq} \leq I_n$.

$$\begin{array}{c}
 M_{\preceq}^T \\
 \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c} 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}
 \wedge
 \begin{array}{c}
 M_{\preceq} \\
 \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c} 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 M_{\preceq} \wedge \preceq \\
 \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c} 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}
 \leq I_n$$

III.) **Transitiva** : Podemos usar el teorema 3.5. Hay que mostrar que $M_{\preceq \circ \preceq} = M_{\preceq} \odot M_{\preceq} \leq M_{\preceq}$.

$$\begin{array}{c}
 M_{\preceq} \\
 \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c} 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}
 \odot
 \begin{array}{c}
 M_{\preceq} \\
 \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c} 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 M_{\preceq \circ \preceq} \\
 \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c} 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \\
 \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]
 \end{array}
 \leq M_{\preceq}$$

b.) Esta relación no es de orden total. Por ejemplo $(3, 5) \notin G_{\preceq}$ ni $(5, 3) \notin G_{\preceq}$

Ejemplo 3.43

Consideremos tres relaciones sobre $A = \{1, 2, 3\}$, con matrices $M_{\mathcal{R}}$, $M_{\mathcal{S}}$ y $M_{\mathcal{T}}$

$$\begin{array}{c}
 M_{\mathcal{R}} \\
 \begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 M_{\mathcal{S}} \\
 \begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 M_{\mathcal{T}} \\
 \begin{array}{ccc}
 1 & 2 & 3 \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

La relación \mathcal{R} es de equivalencia y \mathcal{S} es un orden parcial. En $M_{\mathcal{S}}$, como $2 \neq 1$ entonces si aparece $(1,2)$ no puede aparecer $(2,1)$ por la propiedad antisimétrica. Además \mathcal{S} no es un orden total, pues $1 \mathcal{S} 3$ y $3 \not\mathcal{S} 1$. En cambio $M_{\mathcal{T}}$ es una relación de orden total.

Ejemplo 3.44

Consideremos dos relaciones \mathcal{R} y \mathcal{S} sobre $A = \{1, 2, 4, 5\}$. La relación \mathcal{R} es la relación " \leq ", es decir, $a \mathcal{R} b \iff a \leq b$. La relación \mathcal{S} es la relación " $|$ ", es decir, $a \mathcal{S} b \iff a|b$ (" a divide a b ", sin resto). \mathcal{R} es un orden total sobre A y \mathcal{S} es un orden parcial sobre A . Las matrices de adyacencia de estas relaciones son las matrices $M_{\mathcal{R}}$ y $M_{\mathcal{S}}$.

$$\begin{array}{c}
 M_{\mathcal{R}} \\
 \begin{array}{cccc}
 1 & 2 & 4 & 5 \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 M_{\mathcal{S}} \\
 \begin{array}{cccc}
 1 & 2 & 4 & 5 \\
 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Ejemplo 3.45

Sean \mathcal{R} una relación definida sobre un conjunto no vacío A , y sea $D(A) = \{(x, x) \mid x \in A\}$. Muestre que \mathcal{R} es antisimétrica si y solo si $G_{\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1}} \subseteq D(A)$.

Solución:

" \implies " **Hipótesis:** \mathcal{R} es antisimétrica.

Hay que demostrar que $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq D(A)$.

$$(a, b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \implies a \mathcal{R} b \wedge a \mathcal{R}^{-1} b$$

$$\implies a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a$$

$$\implies a = b \text{ por hipótesis.}$$

$$\therefore (a, b) = (a, a) \in D(A)$$

" \impliedby " **Hipótesis:** $\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \subseteq D(A)$.

Hay que demostrar que \mathcal{R} es antisimétrica.

$$\begin{aligned} a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a &\implies a \mathcal{R} b \wedge a \mathcal{R}^{-1} b \\ &\implies (a, b) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1} \\ &\implies (a, b) \in D(A) \text{ por hipótesis} \\ \therefore a &= b \end{aligned}$$

(*) **Diagramas de Hasse.** Al igual que con las relaciones, existe una manera conveniente de representar una relación de orden para visualizar de que manera induce un orden. Un Diagrama de Hasse es un dígrafo simplificado,

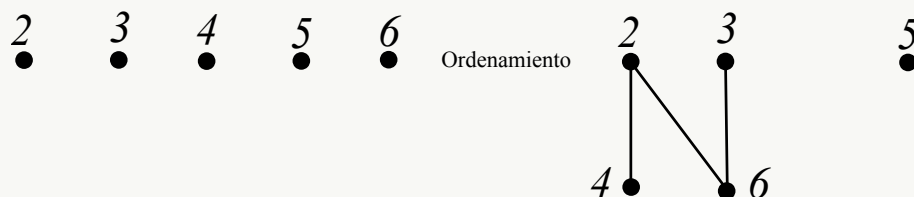
- Eliminamos todos los lazos.
- Eliminamos todos los "camino transitivos".
- El gráfico no tiene flechas, la dirección se asume "hacia arriba"

Ejemplo 3.46

Considere la relación " \preceq " definida sobre $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ con gráfico

$$G_{\mathcal{R}} = A = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (6, 3), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

Ya probamos en el ejemplo 3.42 que esta relación es un orden parcial (no total). Los nodos en el diagrama de Hasse son $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ y como se nota en el gráfico, $4 \preceq 2$, $6 \preceq 2$, $6 \preceq 3$; entonces en el diagrama de Hasse, 2 va arriba de 4 y 6 y 3 va arriba de 6.

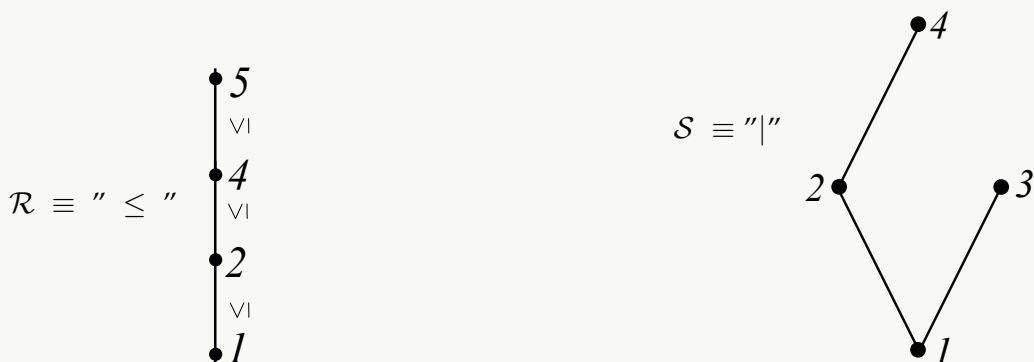


Ejemplo 3.47

Consideremos dos relaciones " \leq " y " $|$ " sobre $A = \{1, 2, 4, 5\}$. Las matrices de adyacencia de estas relaciones son las matrices $M_{\mathcal{R}}$ y $M_{\mathcal{S}}$

$$\begin{array}{c}
 M_{\mathcal{R}} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \ 2 \ 4 \ 5 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 M_{\mathcal{R}} \\
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 1 \ 2 \ 4 \ 5 \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 1 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right]
 \end{array}$$

Sus digramas de Hasse serían



Ejemplo 3.48

Sea $A = \{x, y, z\}$. Sobre $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$ se define la relación \mathcal{R} por $S \mathcal{R} T \iff S \subseteq T$.

- a.) Muestre que \mathcal{R} induce un orden parcial sobre $\mathcal{P}(A)$ pero no total.
- b.) Determine la matriz $M_{\mathcal{R}}$
- c.) Construya un diagrama de Hasse para la relación

Solución: En efecto.

- a.) \mathcal{R} es un orden parcial sobre $\mathcal{P}(A)$ pero no total
 - i.) **Reflexiva:** $\forall S \in \mathcal{P}(A), S \subseteq S$. Por tanto $S \mathcal{R} S$.
 - ii.) **Antisimétrica:** $\forall S, T \in \mathcal{P}(A)$, si $S \mathcal{R} T \wedge T \mathcal{R} S$ entonces $S \subseteq T \wedge T \subseteq S \implies S = T$.
 - iii.) **Transitiva:** $\forall S, T, W \in \mathcal{P}(A)$, si $S \mathcal{R} T \wedge T \mathcal{R} W$ entonces $S \subseteq T \wedge T \subseteq W \implies S \subseteq W$, es decir, $S \mathcal{R} W$

Entonces la relación " \subseteq " induce un orden parcial sobre $\mathcal{P}(A)$ pero no lo ordena totalmente pues, por ejemplo $\{x\} \not\mathcal{R} \{z\}$ pues $\{x\} \not\subseteq \{z\}$.

b.) Para el cálculo de $M_{\mathcal{R}}$ podemos usar una representación cartesiana de la relación.

\subseteq	\emptyset	$\{x\}$	$\{y\}$	$\{z\}$	$\{x,y\}$	$\{x,z\}$	$\{y,z\}$	$\{x,y,z\}$
\emptyset	1	1	1	1	1	1	1	1
$\{x\}$	0	1	0	0	1	1	0	1
$\{y\}$	0	0	1	0	1	0	1	1
$\{z\}$	0	0	0	1	0	1	1	1
$\{x,y\}$	0	0	0	0	1	0	0	1
$\{x,z\}$	0	0	0	0	0	1	0	1
$\{y,z\}$	0	0	0	0	0	0	1	1
$\{x,y,z\}$	0	0	0	0	0	0	0	1

c.) Diagrama de Hasse

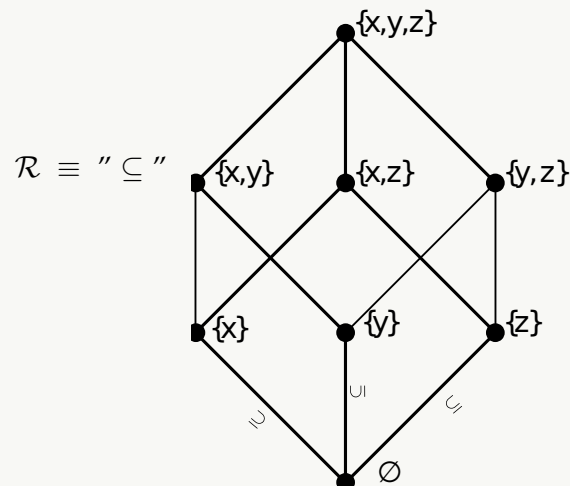


Diagrama de Hasse con Wolfram Mathematica

■ Algoritmo 3.2: Diagramas de Hasse con Mathematica

```
<< Combinatorica`;
am = {
  {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1},
  {0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1},
  {0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1},
  {0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1},
  {0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1},
  {0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1},
  {0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1},
}
```

```

{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1}};

g = FromAdjacencyMatrix[am, Type -> Directed];
h = HasseDiagram[SetVertexLabels[g,
  {" \[EmptySet]", "{x}", "{y}", "{z}", "{x,y}", "{x,z}", "{y,z}",
  "{x,y,z}"}
]];
ShowGraph[h, BaseStyle -> {FontSize -> 18}]

```

Para los ejemplos que siguen, necesitamos un par de recordatorios.

- $k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ entonces, si $k_1 > 1 \implies k_1 k_2 > 1$. En particular, si $k_1 k_2 = 1 \implies k_1 = k_2 = 1$.
- Si $b, k \in \mathbb{N}^*$ y $b = b^k \implies \log_b(b) = \log_b(b^k) = k \log_b(b) \implies 1 = k$.

Ejemplo 3.49

Considere la relación \mathcal{R} sobre \mathbb{N}^* definida por $a \mathcal{R} b \iff \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $a = bk$ (es decir, $b|a$). Muestre que \mathcal{R} es un orden parcial. ¿Es un orden total?

Solución:

- Reflexiva:** $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a = a \cdot 1$. Entonces $a \mathcal{R} a$.
- Antisimétrica:** $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a$ entonces $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ con $a = b \cdot k_1 \wedge b = a \cdot k_2$. Entonces, sustituyendo b , $a = (a \cdot k_2) \cdot k_1 \implies k_1 k_2 = 1 \implies k_1 = k_2 = 1$. $\therefore a = b$.
- Antisimétrica:** $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a$ entonces $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ con $a = b^{k_1} \wedge b = a^{k_2}$. Entonces $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ con $a = b \cdot k_1 \wedge b = c \cdot k_2$. Sustituyendo b , tenemos $a = (ck_2) \cdot k_1$. Por tanto existe $k = k_1 k_2 \in \mathbb{N}^*$ tal que $a = c \cdot k$. $\therefore a \mathcal{R} c$.
- La relación es un orden parcial pero no es un orden total pues, por ejemplo, $2 \not\mathcal{R} 5$ y $5 \not\mathcal{R} 2$.

Ejemplo 3.50

Considere la relación \mathcal{R} sobre \mathbb{N}^* definida por $a \mathcal{R} b \iff \exists k \in \mathbb{N}$ tal que $a = b^k$.

- Muestre que \mathcal{R} no es simétrica
- ¿Es \mathcal{R} un orden parcial?. ¿Es un orden total?

Solución:

a.) \mathcal{R} no es simétrica pues $4 \mathcal{R} 2$ pues $4 = 2^2$ pero $2 \not\mathcal{R} 4$ pues $2 = 4^k \implies k = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}^*$.

b.) ¿Es \mathcal{R} un orden parcial?. ¿Es un orden total?

i.) **Reflexiva:** $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a = a^1$, es decir, $a \mathcal{R} a$

ii.) **Antisimétrica:** $\forall a, b \in \mathbb{N}^*$, si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a$ entonces $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ con $a = b^{k_1} \wedge b = a^{k_2}$. Entonces

$$\begin{aligned} a = b^{k_1} \wedge b = a^{k_2} &\implies b = (b^{k_1})^{k_2} \\ &\implies b = b^{k_1 k_2} \\ &\implies k_1 k_2 = 1 \\ &\implies k_1 = k_2 = 1, \text{ pues } k_1, k_2 \in \mathbb{N}^* \\ &\therefore a = b^1 \end{aligned}$$

iii.) **Transitiva:** $\forall a, b, c \in \mathbb{N}^*$, si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c$ entonces $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N}^*$ con $a = b^{k_1} \wedge b = c^{k_2}$. Entonces

$$\begin{aligned} a = b^{k_1} \wedge b = c^{k_2} &\implies a = (c^{k_2})^{k_1} \\ &\implies a = c^{k_1 k_2} \\ &\therefore a = c^k, \text{ es decir, } a \mathcal{R} c \text{ pues } k = k_1 k_2 \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

Ejemplo 3.51 (Ordenamientos lexicográficos)

El orden lexicográfico es el mismo que usamos en un diccionario. Para comparar dos tiras (strings) $a_1 a_2$ con $a'_1 a'_2$ definimos una relación de orden de la siguiente manera,

Sea " \preceq_1 " es una relación de orden sobre A_1 y " \preceq_2 " es una relación de orden sobre A_2 . El orden lexicográfico " \preceq " sobre $A_1 \times A_2$ es definido por

$$(a_1, a_2) \preceq (a'_1, a'_2) \text{ si } a_1 \preceq_1 a'_1 \text{ o si } a_1 = a'_1 \wedge a_2 \preceq_2 a'_2$$

Este orden se puede generalizar y aplicar al producto cartesiano de n conjuntos. Definimos " \preceq " sobre $A_1 \times A_2, \dots, \times A_n$ por

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \preceq (b_1, b_2, \dots, b_m) \iff a_1 \preceq b_1 \vee [\exists i \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } a_1 = b_1, \dots, a_i = b_i \text{ y } a_{i+1} \preceq b_{i+1}].$$

Este orden se puede usar para comparar tiras (strings) de caracteres no de la misma longitud. Consideremos dos tiras $a_1 a_2 \dots a_n$ con $b_1 b_2 \dots b_m$ en S .

Si $t = \min\{n, m\}$ y \preceq es el orden lexicográfico sobre $S^t = S \times \dots \times S$, entonces $a_1 a_2 \dots a_n$ es menor o igual que $b_1 b_2 \dots b_m$ si y solo si

$$(a_1, a_2, \dots, a_t) \preceq (b_1, b_2, \dots, b_t) \vee [(a_1, a_2, \dots, a_t) \preceq (b_1, b_2, \dots, b_t) \wedge m < n]$$

Definición 3.19

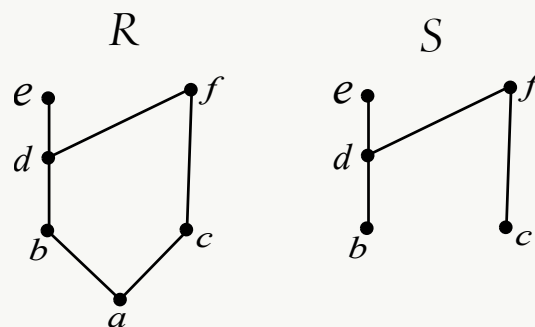
Sea " \preceq " una relación de orden sobre A . Sea $x \in A$.

- x es un "elemento minimal" de A si y solo si $\forall y \in A, y \preceq x \iff y = x$
- x es "primer elemento" de A si y solo si $\forall y \in A, x \preceq y$
- x es "elemento maximal" de A si y solo si $\forall y \in A, x \preceq y \iff x = y$
- x es "último elemento" de A si y solo si $\forall y \in A, y \preceq x$

La definición dice que un "elemento minimal" no tiene predecesores y un "primer elemento" precede a todos (y es por tanto también minimal, pero no viceversa). Un "elemento maximal" no tiene sucesores y un "último elemento" sucede a todos los demás (y es por tanto también maximal, pero no viceversa).

Ejemplo 3.52

Consideremos la relaciones de orden \mathcal{R} sobre $A\{a, b, c, d, e, f\}$, y \mathcal{S} sobre $B\{b, c, d, e, f\}$. Sus diagramas de Hasse son



- a es un elemento minimal y también primer elemento de A .
- e y f son maximales de A , pero no hay último elemento.
- b y c son elementos minimales de B . No hay primer elemento.
- e y f son maximales de B , pero no hay último elemento.

Ejemplo 3.53

Un algoritmo de “ordenamiento topológico” se puede aplicar si tenemos un conjunto A finito y un orden parcial \mathcal{R} definido sobre él. El resultado final sería una subconjunto de elementos de A , totalmente ordenados: $a_1 \prec a_2 \prec \dots \prec a_k$

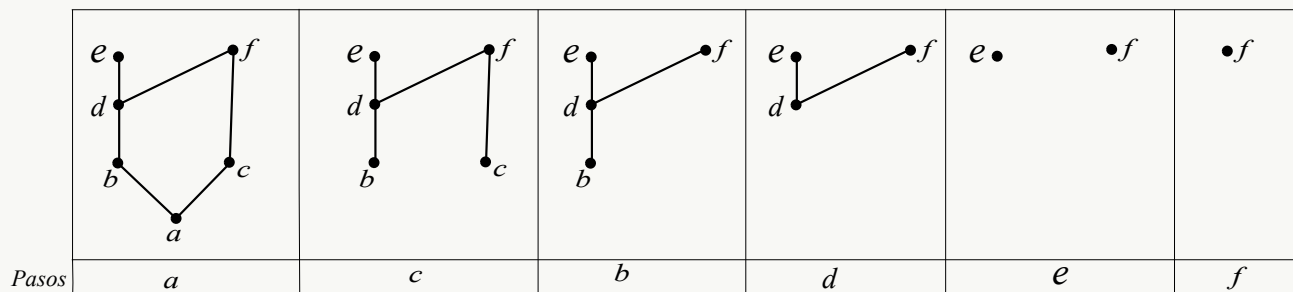
El algoritmo es

```

Entrada: ( $\mathcal{R}$ ,  $A$ ),  $A$  no vacío
 $k = 1$ 
While  $A$  no sea vacío
  begin
     $a_k :=$  un elemento minimal de  $A$ 
     $A := A - \{a_k\}$  (está parcialmente ordenado)
     $k := k+1$ 
  end
Salida  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 

```

Por ejemplo, consideremos orden parcial \mathcal{R} sobre $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. El algoritmo procedería como se muestra en la figura.



La salida es la lista ordenada $\{a, c, b, d, e, f\}$

Ejercicios

3.5.1 Considere el juego “Pi=piedra, Pa=papel, Ti=tijeras”. Este juego es una relación sobre el conjunto $A = \{Pi, Pa, Ti\}$. La relación es $x \mathcal{R} y \iff “x$ es vencido por $y”$ y por supuesto, suponemos que x se vence a sí mismo (empate). Determine la matriz de adyacencia es esta relación y pruebe que es simétrica, antisimétrica pero no transitiva.

3.5.2 Sea X una colección de conjuntos finitos y sea \mathcal{R} una relación definida sobre X por

$$S \mathcal{R} T \iff |S| < |T| \vee S = T$$

- a.) Muestre que \mathcal{R} es una relación de orden. ¿Es un orden total?
- b.) Si $X = \mathcal{P}(\{0,1,2\})$, realice un diagrama de Hasse de la relación \mathcal{R} sobre X .

3.5.3 Sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, se define la relación \mathcal{R} de acuerdo al siguiente criterio,

$$(a, b) \mathcal{R}(c, d) \iff [b = d \wedge (a - c) \in \mathbb{N}]$$

Pruebe que \mathcal{R} es una relación de orden. ¿Es \mathcal{R} una relación de orden total?

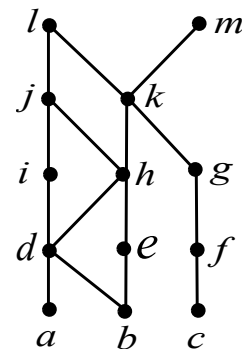
3.5.4 Sobre \mathbb{N} se define la relación \mathcal{R} por $a \mathcal{R} b \iff \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + n$. Muestre que \mathcal{R} es un orden total.

3.5.5 Sea \mathcal{R} una relación de orden sobre A . Muestre que \mathcal{R} es de orden total si y solo si $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = A \times A$.

3.5.6 Sean \mathcal{R} y \mathcal{S} relaciones de orden sobre A . Muestre que

- a.) \mathcal{R}^{-1} es de orden
- b.) Muestre que la relación \mathcal{T} , definida sobre A por $a \mathcal{T} b \iff a \mathcal{R} b \wedge a \mathcal{S} b$, es de orden

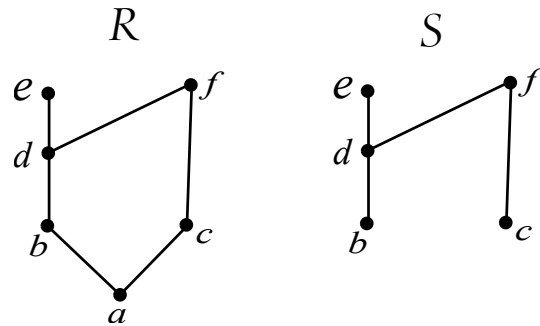
3.5.7 Considere el diagrama de Hasse que está a la derecha. Este diagrama corresponde a una relación de orden \mathcal{R} definida sobre $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m\}$. Si existen, determine los elementos maximales, minimales, primero y último elemento.



3.5.8 Sea $A = \{0,1,2,3\}$. Determine cuáles de las siguientes relaciones son de orden. En caso afirmativo, represente la relación con un diagrama de Hasse y, si existen, determine los elementos maximales, minimales, primero y último elemento.

- a.) $G_{\mathcal{R}} = \{(0,0), (2,2), (3,3)\}$
- b.) $G_{\mathcal{R}} = \{(0,0), (1,1), (2,0), (2,2), (2,3), (3,3)\}$
- c.) $G_{\mathcal{R}} = \{(0,0), (1,1), (1,2), (2,2), (3,1), (3,3)\}$
- d.) $G_{\mathcal{R}} = \{(0,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,2), (2,3), (3,0), (3,3)\}$
- e.) $G_{\mathcal{R}} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (1,3), (2,0), (2,2), (3,3)\}$

3.5.9 Consideremos la relaciones de orden \mathcal{R} sobre $A\{a,b,c,d,e,f\}$, y \mathcal{S} sobre $B\{b,c,d,e,f\}$. Sus diagramas de Hasse son



Determine las matrices $M_{\mathcal{R}}$ y $M_{\mathcal{S}}$

Definición 4.1

Se dice que la relación $f = (G_f, A, B)$ es una función de A en B y se denota $f : A \rightarrow B$, si y solo si todo elemento de A esta relacionado con un único elemento de B , es decir,

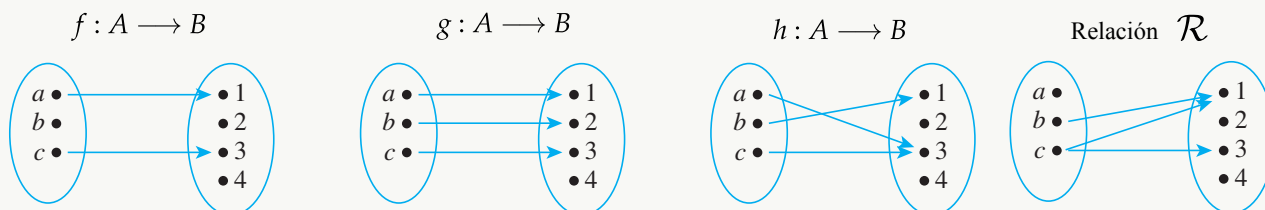
$$(a, b) \in G_f \wedge (a, c) \in G_f \implies b = c \text{ o también } a f b \wedge a f c \implies b = c$$

En vez de escribir “ $a f b$ ” escribimos $f(a) = b$

- A es el **dominio** o conjunto de partida, de f y se denota D_f . Los elementos de D_f se llaman “preimágenes”.
- B es el **codominio** o conjunto de llegada de f . Sus elementos se llaman “imágenes”

Ejemplo 4.1

Sea $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. La tres primeras figuras que que siguen, representan las funciones f, g y h . La cuarta figura es una relación \mathcal{R} pero no una función, pues $(c, 1), (c, 3) \in G_{\mathcal{R}}$.



Definición 4.2 (Ámbito, imagen directa, imagen inversa).

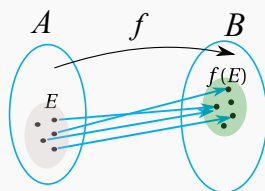
Sea $f : A \rightarrow B$ una función.

a.) El “ámbito” (o rango) de f se denota A_f o también $f[A]$.

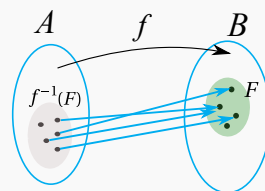
$$f[A] = \{y \in B \text{ tal que } \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\}$$

b.) Si $f(x) = y$, “ x ” es la “preimagen” de y y “ y ” es la “imagen” de x bajo f

c.) La “imagen directa” de $E \subseteq A$ es $f(E) = \{b \in B \text{ tal que } \exists a \in E \text{ con } f(a) = b\}$



La “imagen inversa” de $F \subseteq B$ es $f^{-1}(F) = \{a \in A \text{ tal que } \exists b \in F \text{ con } b = f(a)\}$



En particular, $f^{-1}(b) := f^{-1}(\{b\})$

Ejemplo 4.2

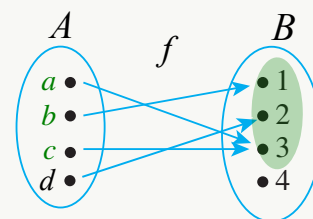
Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Considere la función $f : A \rightarrow B$ representada con la figura a la derecha. Entonces

a.) $f[A] = \{1, 2, 3\}$

b.) Si $E = \{a, b, c\}$, entonces $f(E) = \{1, 3\}$

c.) $f^{-1}(B) = \{a, b, c, d\}$

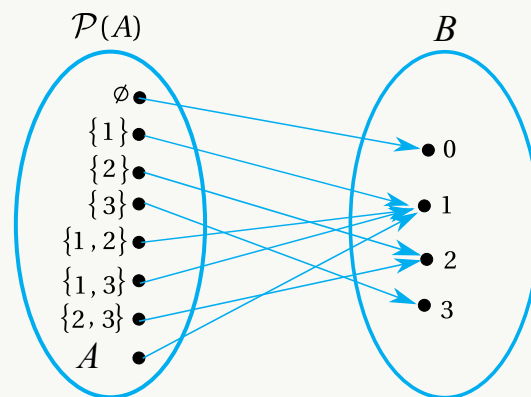
d.) $f^{-1}(4) = \emptyset$



Ejemplo 4.3

Sean $A = \{1, 2, 3, \}$ y $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Sea f de $\mathcal{P}(A)$ en B , definida por

$$f(E) \begin{cases} = 0 & \text{si } E = \emptyset \\ = \min(E) & \text{si } E \neq \emptyset \end{cases}$$



- a.) $f[\mathcal{P}(A)] = \{0, 1, 2, 3\}$
- b.) Si $F = \{2, 3\}$, entonces $f^{-1}(F) = \{\{2\}, \{2, 3\}, \{3\}\}$
- c.) $f(\{\emptyset, A, \{1, 2\}\}) = \{0, 1\}$

Ejemplo 4.4

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Considere la función $f : A \times A \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ definida por $f(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.

- a.) Determine $f(1, 1)$
- b.) Si $E = \{(1, 2), (3, 2), (1, 1)\}$, Determine $f(E)$
- c.) Si $F = \{\{\{3\}, \{3, 5\}\}, \{\{1\}, \{1, 3\}\}, \{\{4\}\}\}$, determine $f^{-1}(F)$.

Solución:

- a.) $f(1, 1) = \{\{1\}, \{1, 1\}\} = \{\{1\}\}$
- b.) $f(E) = \{\{\{1\}, \{1, 2\}\}, \{\{3\}, \{3, 2\}\}, \{\{1\}\}\}$
- c.) $f^{-1}(F) = \{(3, 5), (1, 3), (4, 4)\}$

Ejemplo 4.5

Considere la función $f : A \rightarrow B$. Sean $C, D \subseteq A$.

a.) $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$

b.) $f(C) - f(D) \subseteq f(C - D)$

Solución:

a.) $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$

$$\begin{aligned} \text{Sea } y \in f(C \cap D) &\implies \exists x \in C \cap D \text{ tal que } f(x) = y \\ &\implies \exists x \in C \text{ tal que } f(x) = y \wedge \exists x \in D \text{ tal que } f(x) = y \\ &\implies y \in f(C) \wedge y \in f(D) \\ &\implies y \in f(C) \cap f(D) \end{aligned}$$

b.) [Ejercicio](#)

Ejemplo 4.6

Sea $f : A \rightarrow B$. Sean $C, D \subseteq A$. Verifique que si $C \cap D = \emptyset \implies f(C) - f(\overline{D}) = \emptyset$

Solución: Por contradicción. Si $y \in f(C) - f(\overline{D}) \implies \exists x \in C$ tal que $f(x) = y \wedge y \notin f(\overline{D})$

Pero que $y \notin f(\overline{D})$ significa que y no tiene preimágenes en \overline{D} , por tanto $x \notin \overline{D}$, es decir, la preimagen x de y está en $C \cap D$, pero por hipótesis, este conjunto es vacío: Contradicción.

Ejercicios

(B) 4.0.1 Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, y sea $f : A \times A \rightarrow B$, definida por $f(a, b) = a + b$. Determine

a.) $f(2, 3)$

d.) $f(\{1, 2\} \times \{2, 3\})$

b.) $f[A \times A]$

e.) $f^{-1}(\{4\})$

c.) $f(\{3\} \times \{3\})$

f.) $f^{-1}(\{3, 4, 5\})$

4.0.2 Sean $A = \{3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ y $D = \{(a, b) \in A \times B \text{ tal que } a + b = 6\}$. Sea $f : A \times B \rightarrow [1, 6]$, definida por $f((a, b)) = \frac{a}{b}$. Determine

a.) $f(6, 2)$ y $f(3, 1)$

c.) $f(D)$

b.) $f[A \times B]$

d.) $f^{-1}\left(\left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}\right)$

4.0.3 Sea $f : A \rightarrow B$. Sean $C, D \subseteq A$. Muestre que

a.) $C \cap D = \emptyset \implies f(C) \subseteq f(D)$

b.) $f(C) - f(D) \subseteq f(C - D)$

c.) $f(C) - f(\overline{D}) \subseteq f(C \cap D)$

4.0.4 Sean $f : A \rightarrow B$ una función, M y N dos conjuntos tales que $M \subseteq N \subseteq B$. Demuestre que $f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N)$.

4.1 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

Definición 4.3 (Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas)

Consideremos la función $f : A \rightarrow B$.

a.) f es "inyectiva" si cada imagen es asignada una única preimagen, es decir,

$$\text{si } f(a) = f(b) \implies a = b$$

b.) f es "sobreyectiva" si $f[A] = B$

c.) f es "biyectiva" si f es inyectiva y sobreyectiva.

Definición 4.4 (Funciones de variable real).

a.) Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función de variable real. Su **dominio máximo** es el mayor subconjunto posible de \mathbb{R} cuyos valores no indefinen a $f(x)$

b.) Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones con dominios respectivos D_f y D_g . Se define

i. La función suma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$

ii. La función resta: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$

- ii. La función producto: $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ y su dominio es $D_f \cap D_g$
- iv. La función cociente: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ y su dominio es $D_f \cap D_g - \{x \in D_g : g(x) = 0\}$

Funciones especiales. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

- a.) Función constante: $f(x) = K$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y K constante fija.
- b.) Función nula: $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- c.) Función lineal: $f(x) = mx + b$ con $m, b \in \mathbb{R}$
- d.) Función cuadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

Función creciente, función decreciente.

- e.) Función creciente: Se dice que f es **creciente** en $[a, b]$ si para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$ tal que $x_1 \geq x_2$ entonces $f(x_1) \geq f(x_2)$
- f.) Función decreciente: Se dice que f es **decreciente** en $[a, b]$ si para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$ tal que $x_1 \geq x_2$ entonces $f(x_1) \leq f(x_2)$

Ejemplo 4.7

a.) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$. El dominio máximo de f es $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

b.) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{x}$.

El dominio máximo de f requiere $x+1 > 0$ y $x \neq 0$, es decir, $x > -1$ pero $x \neq 0$. Entonces $D_f =]-1, \infty[- \{0\}$

Ejemplo 4.8

Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^2$.

a.) f es inyectiva. En efecto,

$$\begin{aligned} \text{si } f(a) = f(b) &\implies a^2 = b^2 \\ &\implies \sqrt{a^2} = \sqrt{b^2} \\ &\implies |a| = |b| \\ &\implies a = b \text{ pues } a, b \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

b.) f es sobreyectiva. En efecto, hay que mostrar que $f[\mathbb{R}^+] = \mathbb{R}^+$.

$$" \subseteq " \quad f[\mathbb{R}^+] = \{x^2 \text{ tal que } x \in \mathbb{R}^+\} \subseteq \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} " \supseteq " \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ &\implies \exists x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}^+ \text{ (pues } y \in \mathbb{R}^+) \text{ tal que } x^2 = y \\ &\implies y \in f[\mathbb{R}^+] \\ &\therefore f[A] \supseteq \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

c.) f es biyectiva

Ejemplo 4.9

Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

a.) f es inyectiva. En efecto,

$$\begin{aligned} \text{si } f(a) = f(b) &\implies \frac{a}{a-1} = \frac{b}{b-1} \\ &\implies a(b-1) = b(a-1) \\ &\implies ab - a = ba - b \\ &\implies a = b. \end{aligned}$$

b.) ¿ f es sobreyectiva?. Mmmmm veamos, hay que analizar si $f[\mathbb{R} - \{1\}] = \mathbb{R}$.

$$" \subseteq " \quad \text{Por definición } f[\mathbb{R} - \{1\}] \subseteq \mathbb{R}$$

¿ $" \supseteq "$? Debemos analizar si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} - \{1\}$ tal que $f(x) = y$. Veamos

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\implies y = \frac{x}{x-1} \\
 &\implies y(x-1) = x \\
 &\implies yx - y = x \\
 &\implies x(y-1) = y \\
 &\implies x = \frac{y}{y-1}
 \end{aligned}$$

Por tanto, como $y = 1$ no tiene preimagen en el dominio de f . \therefore la función no es sobreyectiva.

c.) Si restringimos el codominio de f así: $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, entonces f sí sería biyectiva.

Definición 4.5 (Composición).

Consideremos dos funciones $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$. La composición de f y g es una función denotada $g \circ f$. La función $g \circ f : A \rightarrow C$, se define como

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

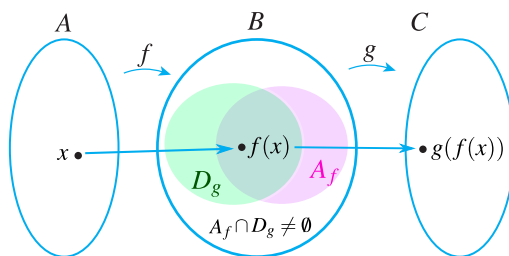
De manera análoga, si $g : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow C$ entonces

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

N

En la definición anterior, para $g \circ f$ estamos asumiendo que $A_f \cap D_g \neq \emptyset$ pues

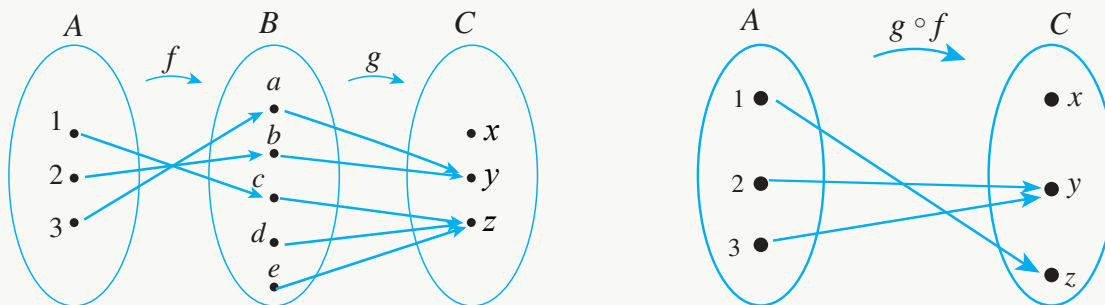
$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \text{ tal que } f(x) \in D_g\}$$



Si $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ entonces, si no hay problemas de dominios y ámbitos, se puede evaluar $(g \circ f)(x)$ tanto como $(f \circ g)(x)$, aunque en general son funciones distintas.

Ejemplo 4.10

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ y $C = \{x, y, z\}$. Sean f y g funciones definidas por el diagrama que sigue.



Entonces

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(c) = z$$

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = y$$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(a) = y$$

Ejemplo 4.11 (Composición de funciones).

a.) Si $f(x) = 2x^2 + x + 1$ y $g(x) = \sqrt{x} + 4$, entonces

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= 2(g(x))^2 + (g(x)) + 1 \\ &= 2(\sqrt{x} + 4)^2 + (\sqrt{x} + 4) + 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= \sqrt{f(x)} + 4 \\ &= \sqrt{2x^2 + x + 1} + 4 \end{aligned}$$

b.) Si $f(x) = x^3 + x$ y $g(x) = \frac{1}{x^3 + x}$, entonces

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
 &= 2(g(x))^3 + (g(x)) \\
 &= 2\left(\frac{1}{x^3 + x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x^3 + x}\right)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
 &= \frac{1}{(f(x))^3 + f(x)} \\
 &= \frac{1}{(x^3 + x)^3 + x^3 + x}
 \end{aligned}$$

Teorema 4.1

- a.) Si $h : S \rightarrow T$, $g : T \rightarrow U$ y $f : U \rightarrow V$, entonces $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$
- b.) Si $g : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow C$ son ambas inyectivas, entonces $f \circ g : A \rightarrow C$ es inyectiva.
- c.) Si $g : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow C$ son ambas sobreyectivas, entonces $f \circ g : A \rightarrow C$ es sobreyectiva.
- d.) Si $g : A \rightarrow B$ y $f : B \rightarrow C$ son ambas biyectivas, entonces $f \circ g : A \rightarrow C$ es biyectiva.

Ejemplo 4.12

Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{x+1}{x^2+4}$, $g(x) = 2x - 4$ y $h(x) = \frac{1}{x}$.

a.) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(f(x)) - 4 = 2\left(\frac{x+1}{x^2+4}\right) - 4$

b.) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{[g(x)]^2+4} = \frac{2x-4+1}{(2x-4)^2+4}$

c.) $(f \circ f)(x) =$

d.) $(g \circ g)(x) =$

e.) $(h \circ g \circ h)(x) =$

Ejemplo 4.13

Sea $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones definidas por $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ |x-4|-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
 $g(x) = x + 1$.

a.) $(f \circ f \circ f)(2) = f(f(f(2))) = f(f(4)) = f(-2) = 4$

b.) $(g \circ f \circ g)(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

c.) $(g \circ g \circ g)(-1) = \underline{\hspace{2cm}}$

Ejemplo 4.14

Sean $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$ y Sea $f : A \rightarrow B$ con

$$G_f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 4), (6, 3)\}.$$

Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva y calcule $f^{-1}(\{4, 5\})$, $f^{-1}(\{2\})$ y $f(\{1, 5\}) \cap f(\{2, 3\})$

Solución:

1) f **no** es inyectiva pues, por ejemplo, $f(1) = f(4) = 3$ pero $1 \neq 4$.

2) f **no** es sobreyectiva pues $2 \in B$, pero no tiene preimagen. De esta manera $f[A] \neq B$.

$$3) \begin{cases} f^{-1}(\{4, 5\}) = \{3, 5, 2\} \\ f^{-1}(\{2\}) = \emptyset \\ f(\{1, 5\}) \cap f(\{2, 3\}) = \{4\} \end{cases}$$

Ejemplo 4.15

Sean A, B, C y D conjuntos no vacíos. Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : C \rightarrow D$. Sea $h : A \times C \rightarrow B \times D$, $h(x, y) = (f(x), g(y))$. Si f y g ambas son biyectivas, muestre que h es biyectiva.

1) **Inyectividad:** **Hipótesis:** f y g ambas son biyectivas

Hqm: Si $h(a, b) = h(p, q)$ entonces $(a, b) = (p, q)$

$$h(a, b) = h(p, q) \implies (f(a), g(b)) = (f(p), g(q))$$

$$\implies \begin{cases} f(a) = f(p) \implies a = p \text{ pues } f \text{ es inyectiva} \\ g(b) = g(q) \implies b = q \text{ pues } g \text{ es inyectiva} \\ \therefore (a, b) = (p, q) \end{cases}$$

2) **Sobreyectividad:** **Hipótesis:** f y g ambas son biyectivas

Hqm: $\forall (p, q) \in B \times D \exists (x, y) \in A \times C$ tal que $h(x, y) = (p, q)$

$$(p, q) \in B \times D \implies \begin{cases} p \in B \implies \exists x \in A \text{ con } f(x) = p, \text{ pues } f \text{ es sobreyectiva} \\ q \in D \implies \exists y \in C \text{ con } g(y) = q, \text{ pues } g \text{ es sobreyectiva} \\ \therefore \exists (x, y) \in A \times C \text{ tal que } h(x, y) = (f(x), g(y)) = (p, q). \end{cases}$$

Ejemplo 4.16

Sea X un conjunto no vacío y sea $H \subseteq X$. Sea $f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definida por el criterio $f(A) = A \cap H$.

- Si $X = \{1, 2, 3\}$, determine H de tal manera que f **no** sea inyectiva
- Determine X y H de tal manera que f **no** sea sobreyectiva.

Solución:

- Si $X = \{1, 2, 3\}$ y $H = \{1\}$ entonces $f(\{1\}) = f(\{1, 2\}) = \{1\}$, pero $\{1\} \neq \{1, 2\}$.
- Si $X = \{1, 2, 3\}$ y $H = \{1\}$ entonces $\forall A \in \mathcal{P}(X)$, $f(A) = A \cap \{1\} \neq \{2\}$, es decir, $\{2\}$ no tiene preimagen.

4.2 Función invertible.

Si $f : A \rightarrow B$ es biyectiva entonces f^{-1} se puede convertir en una función usando el criterio

$$f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$$

En este caso f^{-1} sería “la función inversa” de f (sobre el dominio A) y como tal

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \text{ y } (f \circ f^{-1})(y) = y$$

Se requiere que f sea inyectiva para que f^{-1} esté bien definida y se requiere que f sea sobreyectiva porque si existe un $b \in B$ sin preimagen, entonces $f^{-1}(b) = \emptyset$ y entonces $(f \circ f^{-1})(b) \neq b$.

Por ejemplo, $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{x}{x-1}$, no es sobreyectiva, en particular $f^{-1}(1) = \emptyset$

Pero $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, con $f(x) = \frac{x}{x-1}$ es biyectiva, f es invertible y su inversa sobre este dominio es (la misma f),

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$$

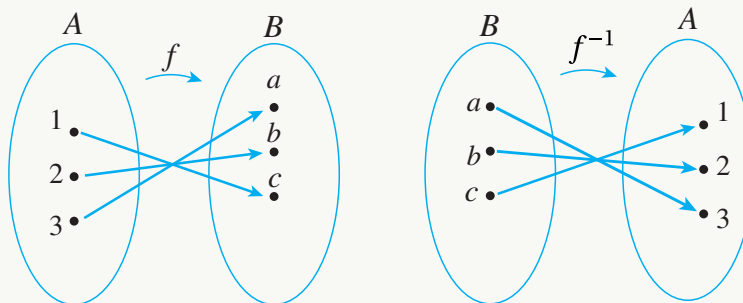
$$\text{En efecto, } (f^{-1} \circ f)(x) = \frac{f(x)}{f(x)-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-x+1}{x-1}} = \frac{x}{1} = x = (f \circ f^{-1})(x)$$

Teorema 4.2 (Función inversa)

La función $f : A \rightarrow B$ es biyectiva si y solo si f es invertible, es decir, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ y $(f \circ f^{-1})(y) = y$.

Ejemplo 4.17

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$. En el diagrama que sigue se muestra una función $f : A \rightarrow B$ biyectiva, y su inversa.



Ejemplo 4.18

Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, definida por $f(x) = \frac{x}{x-1}$. f es biyectiva. Calcular f^{-1} y $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Solución:

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\implies y = \frac{x}{x-1} \\
 &\implies y(x-1) = x \\
 &\implies yx - y = x \\
 &\implies x(y-1) = y \\
 &\implies x = \frac{y}{y-1} \quad \therefore f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}
 \end{aligned}$$

• $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(x) = \underline{\hspace{10cm}}$

Ejemplo 4.19

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$.

- Muestre que f es biyectiva.
- Determine $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Solución:

a.) **Inyectividad:** Si $f(a) = f(b) \implies \sqrt[3]{1-a^3} = \sqrt[3]{1-b^3} \implies 1-a^3 = 1-b^3 \implies a = b$

Sobreyectiva: Si $y \in \mathbb{R}$ entonces $f(x) = y$ con $x = \sqrt[3]{1-y^3}$. En efecto

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt[3]{1-x^3} \\
 \implies y^3 &= 1-x^3 \\
 \implies x^3 &= 1-y^3 \\
 \implies x &= \sqrt[3]{1-y^3}
 \end{aligned}$$

b.) Como $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$, entonces $(f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f^{-1}(f^{-1}(f^{-1}(x)))) = \sqrt[3]{1-x^3}$

Ejemplo 4.20

Sean $f, g : A \rightarrow A$ funciones biyectivas.

- Muestre que $g \circ f$ es inyectiva
- Muestre que $g \circ f$ es sobreyectiva
- Muestre que $g \circ f$ es invertible y que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Solución:

a.) $g \circ f$ es inyectiva. En efecto,

$$\begin{aligned} \text{Si } (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) &\implies g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\implies f(x) = f(y), \text{ por ser } g \text{ inyectiva} \\ &\implies x = y, \text{ por ser } f \text{ inyectiva.} \end{aligned}$$

b.) $g \circ f$ es sobreyectiva: Ejercicio

c.) $g \circ f$ es invertible y $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$: En efecto, como $g \circ f$ es biyectiva, es invertible. Recordemos que la función ID es $\text{Id}(x) = x$, entonces $(g^{-1} \circ g)(x) = \text{Id}(x)$

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(x) &= (f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f)(x), \text{ pues la composición es asociativa} \\ &= (f^{-1} \circ \text{Id} \circ f)(x) \\ &= (f^{-1} \circ f)(x) = x \end{aligned}$$

Es decir, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ejercicios

4.2.1 Sea $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$. Determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

4.2.2 Sea $f(x) = \frac{2}{x+1}$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$. Determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

4.2.3 Sea $f(x) = x + 2$ y $g(x) = \frac{1}{x+2}$. Determine $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

4.2.4 Sea $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x - 2$. Verifique que g es la inversa de f

4.2.5 Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por el criterio $f(x) = x + 2$ y $g(x) = \frac{1}{x+2}$. Calcule $(f \circ g)(x)$

4.2.6 Sea $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ y $g : \mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$. Si $f(w) = \frac{3w+1}{w-2}$, verifique que f es biyectiva y que $g(w) = \frac{2w+1}{w-3}$ es la inversa de f

4.2.7 Dadas las funciones g y h , definidas sobre sus respectivos dominios reales. Calcule $(h^{-1} \circ g \circ h)(x)$ si:

$$g(x) = \frac{x}{x+4} \quad \text{y} \quad h(x) = 3x - 4.$$

4.2.8 Si $f(x) = ax^3$ con $a \neq 0$ y $g(x) = 2x + 3$, determine $(f^{-1} \circ g \circ f)(x)$.

R 4.2.9 Considere las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$, con criterios $g(x) = \frac{x}{x+2}$, $f(x) = x - 1$ y ambas biyectivas. Verifique que $(g^{-1} \circ f \circ g)(x) = \frac{-4}{x+4}$.

R 4.2.10 Considere la función $f : [1, +\infty] \rightarrow (1, 3]$ definida por $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}$.

- 1) Pruebe que f es una función biyectiva.
- 2) Determine $f^{-1}(x)$.

R 4.2.11 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función biyectiva, y sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cuyo criterio está dado por $g(x) = f(x) + k$, para una constante $k \in \mathbb{R}$.

- 1) Muestre que g es una función inyectiva.
- 2) Muestre que g es una función sobreyectiva.
- 3) Determine $g^{-1}(x)$.

R 4.2.12 Pruebe que la función $f : \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$, definida por $f(x) = \frac{2x}{3x+6}$ es una función biyectiva.

R 4.2.13 Considere la función $f : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{k\}$ definida por $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$

- 1) Demuestre que f es inyectiva.
- 2) Determine el valor de k para que f sea sobreyectiva.

R 4.2.14 Calcule el criterio de f^{-1} para la función biyectiva $f :]-\infty, 0] \rightarrow]-\infty, 5]$, definida por $f(x) = -2x^2 + 5$.

R 4.2.15 Considere la función $f : \mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\} \rightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ definida por $f(x) = \frac{3x-7}{9x+6}$.

- 1) Pruebe que f es una función biyectiva.
- 2) Compruebe que $f^{-1}(x) = (f \circ f)(x)$.

R 4.2.16 Encuentre las funciones lineales f tales que $(f \circ f \circ f)(x) = -8x + 5$.

R 4.2.17 Si $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = 4 - 2x$, calcule $(f^{-1} \circ g \circ f)^{-1}(x)$.

R 4.2.18 Considere las funciones g y h definidas sobre \mathbb{R} , con criterios $g(z) = 2z + 3$ y $h(w) = 3 - 5w$. Determine el criterio de la función $(h \circ g \circ h^{-1})^{-1}$.

R 4.2.19 Considere las funciones g y h definidas sobre sus respectivos dominios reales, con criterios $h(x) = \frac{2}{x-4}$ y $g(x) = 2x - 1$. Determine $(g^{-1} \circ h \circ h)(x)$ y encuentre el dominio de esta función.

4.2.20 Considere la función $f : \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ con criterio $f(x) = \frac{1}{x+2}$, y la función $g : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$ con criterio $g(x) = \frac{x-3}{x-2}$. Si se sabe que ambas funciones son biyectivas, verifique que $(f \circ g^{-1})(x) = \frac{x-1}{4x-5}$ y además determine el dominio de $f \circ g^{-1}$.

4.2.21 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biyectiva. Si $(2, 5) \in G_f$ y además $f^{-1}\left(\frac{k+4}{k-2}\right) = 2$, calcule el valor de k .

4.2.22 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 2$.

- 1) Demuestre que f es una función biyectiva.
- 2) Determine el criterio de $f^{-1}(x)$.

4.2.23 Considere las funciones f y g definidas sobre sus respectivos dominios de números reales de manera que ambas son biyectivas y sus criterios son $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, $g(x) = 2x - 1$. Calcule $(g^{-1} \circ f)(x)$.

4.2.24 Considere la función $f :] -\infty, 1] \rightarrow [2, +\infty]$ definida por $f(x) = (x-1)^2 + 2$.

- 1) Pruebe que f es una función biyectiva.
- 2) Determine el criterio $f^{-1}(x)$.

4.2.25 Sea $A = \{3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ y considere la función $f : A \times B \rightarrow [1, 6]$ definida por $f(a, b) = \frac{a}{b}$.

- 1) Determine si f es inyectiva.
- 2) Determine la cardinalidad del ámbito de f .
- 3) Determine si f es sobreyectiva.
- 4) Calcule $f(C)$, donde $C = \{(a, b) \in A \times B \text{ tal que } a + b = 6\}$.
- 5) Calcule $f^{-1}(\{2, 3\})$.

4.2.26 Sean $A = \{8\}$ y $B = \{1, 3, 9\}$. Considere la función $g : A \times B \rightarrow \{3, 4\}$ definida por:

$$g(a, b) = \begin{cases} 3 & \text{si } a < b \\ 4 & \text{si } a > b \end{cases}$$

Además, considere la función $f : \mathcal{P}(B) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ de manera que $f(X)$ es igual a la cardinalidad de X .

- 1) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva.
- 2) Determine si g es inyectiva y si es sobreyectiva.
- 3) Calcule $f^{-1}(\{2\})$.
- 4) Calcule $g^{-1}(g(\{(8, 1)\}))$.

R 4.2.27 Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y considere $f : A \rightarrow A$ tal que $f(a) = \begin{cases} a - 1 & \text{si } a \geq 2 \\ a + 1 & \text{si } a < 2 \end{cases}$.

- 1) Determine si f es inyectiva.
- 2) Determine si f es sobreyectiva.
- 3) Calcule $f(\{0, 3, 6\})$.
- 4) Calcule $f(\{2, 4, 5\})$.
- 5) Calcule $f^{-1}(\{3, 5\}) \cup f^{-1}(f(\{4\}))$.

R 4.2.28 Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Considere la función $f : A \times A \rightarrow B$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x < y \\ 2x & \text{si } x = y \\ x - y & \text{si } x > y \end{cases}$$

- 1) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva.
- 2) Calcule $f^{-1}(\{2, 7\})$.
- 3) Calcule $f^{-1}(f(\{(2, 2)\}))$.

R 4.2.29 Sea $A = \{2, 3, 5\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Si $f : A \times B \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ es una función definida por el criterio

$$f(a, b) = \begin{cases} 2a & \text{si } a < b \\ b & \text{si } a > b \\ 3a - b & \text{si } a = b \end{cases}$$

- 1) Determine si f es inyectiva y si f es sobreyectiva.
- 2) Determine $f^{-1}(\{1, 3, 5\})$, $f^{-1}(\{7\})$, $f(f^{-1}(\{4\}))$.
- 3) Si $C = \{(a, b) \in A \times B \text{ tal que } a + b = 6\}$, calcule $f^{-1}(f(C))$.
- 4) Calcule $f(((f(3, 2), f((f(3, 2), f(3, 2))))))$.

R 4.2.30 Sea $A = \{a, b, c\}$ y considere la función $f : P(A) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$ definida por $f(B) = |B|$.

- 1) Determine si f es inyectiva o sobreyectiva.
- 2) Si es posible, calcule:
 - a.) $f(\{\{a\}, \{a, b\}, \{b\}\})$.
 - b.) $f(f^{-1}(\{4\}))$.
 - c.) $f^{-1}(f(\{b\}))$.

4.2.31 Para los conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $C = \{1, 2, 3\}$, considere la función $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow B$ definida por $f(M) = |M|$ y la función $g : B \rightarrow C$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 3 \\ x - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

- 1) Determine si $g \circ f$ es inyectiva y si $g \circ f$ es sobreyectiva.
- 2) Calcule $f^{-1}(\{2, 3\})$.
- 3) Calcule $(g \circ f)^{-1}(\{2, 3\})$.

4.2.32 Sea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $f : A \rightarrow A$ con $f(a) = \begin{cases} a - 3 & \text{si } a \geq 4 \\ a + 3 & \text{si } a < 4 \end{cases}$.

- 1) Determine si la función f es inyectiva.
- 2) Determine si la función f es sobreyectiva.
- 3) Calcule $f(\{0, 3, 6\})$.
- 4) Calcule $f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(f(\{6\}))$.

4.2.33 Determine $(g \circ f)(x \cdot y)$ si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una función biyectiva que cumple que:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+$$

y $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que:

$$g(x + y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+$$

4.2.34 Sea $A = \{1, 3, 9\}$, $B = \{0, 1, 3, 9\}$ y $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow B$ con $f(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } M = \emptyset \\ k & \text{si } M \neq \emptyset \end{cases}$

donde k es el menor elemento del conjunto M .

- 1) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva.
- 2) Si $C = \{M \in \mathcal{P}(A) \text{ tal que } |M| = 2\}$, calcule $f(C)$.
- 3) Calcule $f^{-1}(\{0, 3\})$.

R 4.2.35 Sea $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow B$ definida por:

$$f(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } M = \emptyset \\ k & \text{si } M \neq \emptyset \end{cases}$$

donde k es la suma de los elementos del conjunto M .

- 1) Determine si f es inyectiva y si es sobreyectiva.
- 2) Si $C = \{M \in \mathcal{P}(A) \text{ tal que } 2 \in M\}$, calcule $f(C)$.
- 3) Calcule $f^{-1}(\{0, 3\})$.

R 4.2.36 Sean A , B y C conjuntos no vacíos. Suponga que $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$. Demuestre que si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

R 4.2.37 Considere la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con criterio $f(x) = 8x^3 - 5$, además, sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ otra función que cumple $(f \circ g)(x) = 35 - 8x$. Determine el criterio $g(x)$.

R 4.2.38 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva, además, sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ otra función definida por $g(x) = 2f(5x) + 3$. Demuestre que g es una función inyectiva.

R 4.2.39 Sea $f : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{3\}$, definida por $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$.

- a.) Probar que f es inyectiva
- b.) Probar que f es sobreyectiva
- c.) Calcule f^{-1}

R 4.2.40 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Determine su dominio máximo.

R 4.2.41 Sea $f : [1, \infty[\rightarrow] - \infty, 2]$ definida por $f(x) = -x^2 + 2x$. Muestre que f es biyectiva y calcule f^{-1} .

R 4.2.42 Sea $f : [-1, \infty[\rightarrow [-2, \infty[$ definida por $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Muestre que f es biyectiva y determine su inversa.

R 4.2.43 Considere los conjuntos $A = \{3, 4, 5, 6\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Sea $f : A \times B \rightarrow [1, 6]$, definida por $f((a, b)) = \frac{a}{b}$. ¿Es f inyectiva?. ¿Es f sobreyectiva?

R 4.2.44 Sean A , B y C conjuntos no vacíos, suponga que f es una función de A en B y además, que g es una función de B en C . Demuestre que si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

4.2.45 Sean A , B y C conjuntos no vacíos; suponga que f es una función de A en B y g una función de C en B . Demuestre que si f y g son biyectivas, entonces $g^{-1} \circ f$ es biyectiva.

En los ejercicios que siguen, se asume que $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ y que f y g están definidas en todo su dominio.

4.2.46 Muestre que si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva

4.2.47 Muestre que si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva

4.2.48 Muestre que si $g \circ f$ es sobreyectiva y g es inyectiva, entonces f es sobreyectiva

4.2.49 Muestre que si $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva

Inducción Matemática

El principio de *inducción matemática* es un método de demostración, se usa comúnmente para demostrar la veracidad de una proposición $P(n)$ para todos los números naturales o la veracidad a partir de $n \geq k$. También puede usarse para probar proposiciones sobre cualquier conjunto bien ordenado.

Principio del Buen Orden: Todo conjunto no vacío de números naturales contiene un elemento mínimo. En particular, si $S \subset \mathbb{Z}$ y si S tiene al menos un elemento positivo, entonces S tiene un entero positivo mínimo.

Principio del palomar: Si k es un entero positivo y $k + 1$ o más objetos son asignados a k cajas, entonces hay al menos alguna caja a la que se le asignaron dos o más objetos.

Ejemplo 5.1

En un grupo de 367 personas, debe haber al menos dos que cumplan años el mismo día, porque hay solo 366 posibles días para cumplir años.

Principio de Inducción: Para probar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero positivo n , se deben ejecutar los dos pasos siguientes:

- 1) Verificar que $P(n)$ se cumple para $n = 1$,
- 2) Probar que si se cumple $P(k)$ con $k \in \mathbb{N}$ (hipótesis de inducción), entonces se cumple $P(k + 1)$

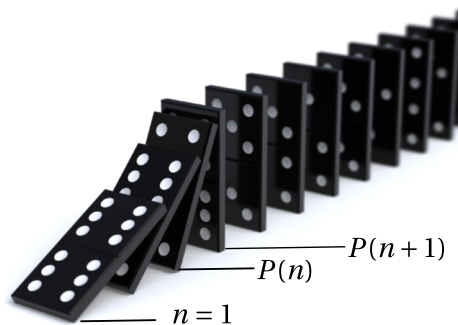


Figure 5.1: Idea de inducción matemática usando un juego de domino.

Se puede probar que el principio de inducción es un método válido de prueba si asumimos el principio del buen orden como un axioma.

Históricamente, el primer ejemplo que se conoce en el que se usó inducción matemática aparece en el libro “Arithmeticonum Libri Duo” de Francesco Maurolico (1494-1575). En este libro, entre otras cosas, Maurolico presenta gran variedad de propiedades de los enteros y las pruebas de estas propiedades. Para las demostraciones, él ideó el método de inducción matemática. La primera vez que se usa el método, es para probar que la suma de los primeros n enteros impares es n^2 . El nombre “inducción matemática”, lo usó por primera vez el matemático inglés John Wallis.

Ex aggregatione imparium numerorum ab unitate per ordinem successivè sumptorum, construuntur quadrati numeri continuati ab unitate, ipsisq; imparibus collaterales. Nam per antepremissam, unitas imprimis cum impari sequente facit quadratum sequentem scilicet, 4. Et ipse 4. quadratus cum impari tertio scilicet 5. facit quadratum tertium, scilicet 9. Itemque 9. quadratus tertius cum impari quarto scilicet 7. facit quadratum quartum, scilicet 16. & sic deinceps in infinitum, semper 13² repetita propositum demonstratur.

Figure 5.2: Francesco Maurolico. “Arithmeticonum Libri Duo”, pág 7. En www.books.google.com

Principio de Inducción Completa: Para probar que una proposición $P(n)$ es verdadera para todo entero positivo n , se deben ejecutar los dos pasos siguientes:

- Verificar que $P(n)$ se cumple para $n = 1$,
- Probar que si se cumple $P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(k)$ con $k \in \mathbb{N}$ (hipótesis de inducción), entonces se cumple $P(k + 1)$

Se puede probar que el principio de inducción completa es equivalente al principio de inducción. Es decir, cada principio puede ser demostrado asumiendo el otro. La ganancia es que el principio de inducción completa es más flexible. A el principio de inducción completa también se le llama “principio de inducción fuerte” o “segundo principio de inducción”.

Ejemplo 5.2

Probar que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Solución: En este caso, n indica el número de sumandos.

- La proposición es correcta para $n = 1$ pues $1 = 1^2$
- Hipótesis de inducción:** La proposición es cierta para $n = k$, es decir,

$$1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1 = k^2$$

Hay que mostrar que: La proposición es cierta para $n = k + 1$, es decir, $1 + 3 + 5 + \dots + 2k + 1 = (k + 1)^2$.

Tomemos la hipótesis de inducción y sumemos el siguiente término impar, $2(k + 1) - 1 = 2k + 1$, a ambos lados,

$$\overbrace{1 + 3 + 5 + \dots + 2k - 1}^{k^2} + 2k + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Por lo tanto, hemos demostrado que si la proposición es correcta para $n = k$, es correcta para $n = k + 1$. Entonces, la fórmula es válida para todo $n \in \mathbb{N}^*$, por el principio de inducción.

Ejemplo 5.3

Probar que si $r \neq -1$, entonces $\sum_{k=1}^n r^{k-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Solución: Hay que probar que $1 + r^1 + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$ para $n \geq 1$.

a.) La proposición es correcta para $n = 1$ pues $r^0 = \frac{1 - r^1}{1 - r} = 1$ pues $r - 1 \neq 0$.

b.) **Hipótesis de inducción:** $1 + r^1 + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Hay que mostrar que: $1 + r^1 + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$

$$1 + r^1 + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}, \text{ por hipótesis de inducción.}$$

$$1 + r^1 + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n = \frac{1 - r^n}{1 - r} + r^n$$

$$1 + r^1 + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^n + (1 - r)r^n}{1 - r}$$

$$= \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Ejemplo 5.4

Probar que $2^n \geq 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Solución:

a.) La proposición es correcta para $n = 1$ pues $2^1 \geq 2 \cdot 1$.

b.) **Hipótesis de inducción:** $2^n \geq 2n$

Hay que mostrar que: $2^{n+1} \geq 2(n+1)$

$$\begin{aligned} 2^n &\geq 2n, \text{ por hipótesis de inducción.} \\ 2^n \cdot 2 &\geq 2n \cdot 2 = 2n + 2n \\ 2^{n+1} &\geq 2n + 2n \geq 2n + 2, \text{ pues } 2n \geq 2 \text{ si } n \geq 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.5

Probar que $n^2 \geq 2n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

Solución:

a.) La proposición es correcta para $n = 2$ pues $2^2 \geq 2 \cdot 2$.

b.) **Hipótesis de inducción:** $n^2 \geq 2n$

Hay que mostrar que: $(n+1)^2 \geq 2(n+1)$

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &\geq 2n + 2n + 1, \text{ por hipótesis de inducción.} \\ &\geq 2n + 2, \text{ pues } 2n + 1 \geq 2 \text{ si } n \geq 2. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6

Probar que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \frac{n}{2} + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Solución:

a.) La proposición es correcta para $n = 1$ pues $1 \leq \frac{1}{2} + 1$.

b.) **Hipótesis de inducción:** $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \frac{n}{2} + 1$

Hay que mostrar que: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{n+1}{2} + 1$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{n+1}, \text{ por hipótesis de inducción.}$$

$$\text{Como } n \geq 1 \implies \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2} + 1$$

Ejemplo 5.7

Verifique que $7^{2n} + 16n - 1$ es divisible por 64 para todo $n \geq 2$.

Solución:

a.) La proposición es correcta para $n = 2$ pues $7^{2 \cdot 2} + 16 \cdot 2 - 1 = 64 \cdot 38 = 2432$

b.) **Hipótesis de inducción:** $7^{2n} + 16n - 1 = 64k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

Hay que mostrar que: $7^{2(n+1)} + 16(n+1) - 1 = 64k_1$ para algún $k_1 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 7^{2(n+1)} + 16(n+1) - 1 &= 7^{2n+2} + 16n + 16 - 1 \\ &= 7^2 \cdot 7^{2n} + 16n + 16 - 1 \\ &= 7^2 \cdot (64k - 16n + 1) + 16n + 16 - 1, \text{ por hipótesis de inducción.} \\ &= 64k \cdot 7^2 - 64 \cdot 12 \cdot n + 64 = 64k_1 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.8

Verifique que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 4^{2n} + 4 = 20k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Solución:

a.) La proposición es correcta para $n = 1$ pues $4^2 + 4 = 20 \cdot 1$

b.) **Hipótesis de inducción:** $4^{2n} + 4 = 20k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$

Hay que mostrar que: $4^{2(n+1)} + 4 = 20k_1$ para algún $k_1 \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 4^{2(n+1)} + 4 &= 4^2 4^n + 4 && \text{Complete el razonamiento!} \\ &= \dots \\ &= \dots \\ &= 20k_1 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.9

Utilice la fórmula $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + (n-1)(n+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$ para calcular el valor exacto de la suma

$$S = 121 \cdot 123 + 122 \cdot 124 + 123 \cdot 123 + \dots + 35343$$

Solución: Resolvemos $35343 = (n-1)(n+1) \implies n = 188$. Ahora aplicamos la fórmula con $n = 121$ y $n = 188$,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + 120 \cdot 122 + 121 \cdot 123 + 122 \cdot 124 + 123 \cdot 123 + \dots + 187 \cdot 189 &= \frac{188(188-1)(2 \cdot 188 + 5)}{6} \\ \frac{121(121-1)(2 \cdot 121 + 5)}{6} + 121 \cdot 123 + 122 \cdot 124 + 123 \cdot 123 + \dots + 187 \cdot 189 &= 2232406 \\ 597740 + 121 \cdot 123 + 122 \cdot 124 + 123 \cdot 123 + \dots + 187 \cdot 189 &= 2232406 \\ 121 \cdot 123 + 122 \cdot 124 + 123 \cdot 123 + \dots + 187 \cdot 189 &= 1634666 \end{aligned}$$

Ejercicios

(B) 5.0.1 Demuestre las siguientes igualdades utilizando el método de inducción matemática. Además utilice la fórmula para encontrar la suma dada.

$$1) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2) \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \dots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n} \quad \text{si } n \geq 1.$$

$$3) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad n \geq 1. \quad \text{A demás calcule el valor de}$$

$$1 + 8 + 27 + \dots + 13824$$

$$4) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, \quad n \geq 1. \quad \text{Además calcule el valor de}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{399}$$

$$5) \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}, \quad n \geq 1. \quad \text{Además calcule el valor de}$$

$$\frac{1}{17 \cdot 21} + \frac{1}{21 \cdot 25} + \cdots + \frac{1}{397 \cdot 401}$$

$$6) 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}, \quad n \geq 1. \quad \text{Además calcule el valor de}$$

$$151 \cdot 153 + 152 \cdot 154 + \cdots + 201 \cdot 203$$

$$7) \frac{4}{5^0} + \frac{4}{5^1} + \frac{4}{5^2} + \cdots + \frac{4}{5^n} = 5 - \frac{1}{5^n}, \quad n \geq 1. \quad \text{Además calcule el valor de}$$

$$\frac{4}{5^{10}} + \frac{4}{5^{11}} + \cdots + \frac{4}{5^{30}}$$

$$8) 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + (n-1)(n+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}, \quad n \geq 2. \quad \text{Además calcule el valor de}$$

$$100 \cdot 102 + 101 \cdot 103 + \cdots + 147 \cdot 149$$

$$9) 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (n+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}, \quad n \geq 2. \quad \text{Además calcule el valor de}$$


$$12 \cdot 15 + 13 \cdot 16 + \cdots + 990$$

$$10) 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + \cdots + n(n+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}, \quad n \geq 1. \quad \text{Además calcule el valor de}$$

$$10 \cdot 14 + 11 \cdot 15 + \cdots + 1365$$

$$11) 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \quad n \geq 1. \quad \text{Además calcule el valor de}$$

$$4 + 8 + \cdots + 32768$$

 **5.0.2** Demuestre, utilizando inducción matemática, que el número divide a la expresión dada para el subconjunto de \mathbb{N} dado. Recuerde que

$a \mid b$ se lee “ a divide a b ”

$$1) 13 \mid 4^{2n+1} + 3^{n+2}, \quad n \geq 1.$$

$$2) 7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}, \quad n \geq 1.$$

3) $8 \mid 3^{2n} + 7^{2n} + 6, n \geq 1.$

4) $9 \mid 10^{n+1} + 12 \cdot 4^{n+2} - 4, n \geq 0.$

5) $8 \mid 3^{2n} + 7^{2n} + 6, n \geq 1.$

6) $15 \mid 4^{2n+1} + 31^{n+1} - 5, n \geq 0.$

7) $9 \mid 10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5, n \geq 0.$

8) $64 \mid 7^{2n} + 16n - 1, n \geq 1.$

9) $9 \mid 2^{2n} + 15n - 1, n \geq 2.$

10) $5 \mid 3^{3n+1} + 2^{n+1}, n \geq 1.$

11) $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}, n \geq 0.$

5.0.3 Demuestre las siguientes desigualdades utilizando inducción matemática:

1) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, n \geq 2.$

2) $\frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3, n \geq 2.$

3) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \leq \frac{n}{2} + 1, n \geq 1.$

4) $3^n < (n+1)!, n \geq 4.$

5.0.4 Probar que $2^n < n!$ para todo natural $n \geq 4$

5.0.5 Probar que $n^2 + 3n + 1 < 2(3^n) \forall n \geq 4$

5.0.6 Probar que $n^3 < 3^n \forall n \geq 4$

5.0.7 Probar que 31 divide a $5^{n+1} + 6^{2n-1} \forall n \in \mathbb{N}^*$

5.0.8 Probar que 3 divide a $12^n - 7^n - 4^n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Relaciones de recurrencia

6.1 Introducción

Sucesiones. Consideremos la sucesión $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$. Si denotamos con $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, \text{etc.}$ entonces se podría deducir que

$$a_n = \frac{(-1)^n + 1}{2}$$

a_n es el término general de la sucesión.

Sucesiones definidas por recurrencia. Algunas sucesiones están definidas por una relación de recurrencia, por ejemplo

$$a_n = a_{n-1} + n a_{n-2} + 1, \text{ con } a_0 = 1 \text{ y } a_1 = 2 \text{ (Condiciones iniciales)}$$

Entonces

$$a_2 = a_1 + 2 \cdot a_0 + 1 = 5$$

$$a_3 = a_2 + 3 \cdot a_1 + 1 = 12$$

En algunos casos podemos, dada una relación de recurrencia, deducir una fórmula para el término general a_n .

Ejemplo 6.1

La sucesión (aritmética) definida por $a_k = a_{k-1} + d, \forall k \geq 1$ y la condición inicial $a_0 = a$, tiene término general $a_n = a + n \cdot d \forall n \geq 0$

Ejemplo 6.2

La sucesión (geométrica) definida por $a_k = r \cdot a_{k-1}, \forall k \geq 1$ y la condición inicial $a_0 = a$, tiene término general $a_n = a \cdot r^n \forall n \geq 0$

6.2 Sucesiones de recurrencia homogéneas.

Las sucesiones de recurrencia homogéneas de orden dos, con coeficientes constantes son relaciones del tipo

$$a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2} \quad \forall n \geq N \text{ con constantes } A, B \neq 0$$

Ecuación característica. Si para algún $t \neq 0$ se tiene que $a_n = t^n$ es solución de la relación $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$, entonces

$$t^n = At^{n-1} + Bt^{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

Si $n = 2$, tenemos $t^2 = At + B$ o también $t^2 - At - B = 0$. Esta es la llamada "ecuación característica" de la relación $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$.

Teorema 6.1

Consideremos una relación de recurrencia de la forma $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ con A, B constantes y $B \neq 0$. Ahora consideremos su ecuación característica $t^2 - At - B = 0$.

a.) Si la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas r_1 y r_2 , entonces

$$a_n = C \cdot r_1^n + D \cdot r_2^n$$

donde los números C y D se determinan con las *condiciones iniciales* de la relación

b.) Si la ecuación característica tiene solo una raíz real r_1 entonces

$$a_n = C \cdot r_1^n + D \cdot n \cdot r_1^n$$

donde los números C y D se determinan con las *condiciones iniciales* de la relación

Y en general,

Teorema 6.2

Una relación de recurrencia de la forma $a_n = A_1a_{n-1} + A_2a_{n-2} + \dots + A_{n-k}a_{n-k}$ (con k sumandos) y con los coeficientes A_i constantes y $A_{n-k} \neq 0$, tiene ecuación característica

$$t^k - A_1t^{k-1} - \dots - A_{n-k} = 0$$

a.) Si la ecuación característica tiene k raíces distintas r_1, \dots, r_k entonces

$$a_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n + \dots + C_k \cdot r_k^n$$

Los números C_i se determinan con las k *condiciones iniciales* de la relación.

b.) Si la ecuación característica tiene una raíz r de multiplicidad $m + 1$ entonces

$$t^k - A_1t^{k-1} - \dots - A_{n-k} = (t - r)^{m+1}Q(t)$$

Si la ecuación característica tiene una raíz r_j de multiplicidad $m + 1$, entonces en vez de agregar el sumando $A_j r^n$ a la solución general, agregamos el sumando

$$A_j n^0 r_j^n + A_{j+1} n^1 r_j^n + A_{j+2} n^2 r_j^n + \dots + A_{j+m} n^m r_j^n$$

Los $m + 1$ números A_j, \dots, A_{j+m} se determinan con las *condiciones iniciales* de la relación

Ejemplo 6.3

Resolver $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ con condiciones iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = 4$.

Solución:

Ecuación característica: $t^2 - 5t + 6 = 0 \implies t = 2$ y $t = 3$ (dos distintas)

Solución general: $a_n = C \cdot 2^n + D \cdot 3^n$

Aplicamos condiciones iniciales:

$$\begin{cases} a_0 = C \cdot 2^0 + D \cdot 3^0 = C + D = 1 \\ a_1 = C \cdot 2^1 + D \cdot 3^1 = 2C + 3D = 4 \end{cases} \implies C = -1 \wedge D = 2.$$

$$\therefore a_n = -1 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$$

Ejemplo 6.4

Considere la relación a_n definida por recurrencia por $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$ si $n \geq 4$, con $a_1 = 6$, $a_2 = 1$ y $a_3 = 12$

- Determine a_5 con esta fórmula
- Determine una fórmula explícita para a_n y utilice esta fórmula para calcular a_5

Solución:

a.) $a_4 = a_3 + a_2 - a_1 = 7$ y $a_5 = a_4 + a_3 - a_2 = 18$

b.) Fórmula explícita para a_n

Ecuación característica: $t^3 - t^2 - t + 1 = (t - 1)^2(t + 1)$. La raíz $t = 1$ es de multiplicidad $m + 1 = 2$ entonces $m = 1$.

Solución general: $a_n = A_1 n^0 (1)^n + A_2 n^1 (1)^n + A_3 (-1)^n$

$$\text{Aplicar condiciones iniciales: } \begin{cases} a_1 = A_1 + A_2 - A_3 = 6 \\ a_2 = A_1 + 2A_2 + A_3 = 1 \\ a_3 = A_1 + 3A_2 - A_3 = 12 \end{cases} \implies \begin{cases} A_1 = -1 \\ A_2 = 3, \\ A_3 = -4 \end{cases}$$

$$\therefore a_n = -1 + 3n - 4(-1)^n \text{ y } a_5 = 18.$$

Ejemplo 6.5

Si $a_n = (1 + 2n)2^n + n(-2)^n$ para $n \geq 4$, determine una relación de recurrencia para esta relación.

Solución: Las condiciones iniciales se obtiene evaluando en la relación: Serían $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 28$ y $a_3 = 32$.

La relación es $a_n = 1 \cdot 2^n + 2n \cdot 2^n + n(-2)^n$. La forma de esta relación es

$$a_n = A_1 \cdot 2^n + A_2 n \cdot 2^n + A_3 \cdot (-2)^n + A_4 n (-2)^n$$

La ecuación característica tendría dos raíces, $t = 2$ y $t = -2$, ambas de multiplicidad dos. Es decir, la ecuación característica es $(t - 2)^2(t + 2)^2 = t^4 - 8t^2 + 16 = 0$ y la relación de recurrencia es

$$a_n = 8a_{n-2} - 16a_{n-4}$$

para $n \geq 4$ y las condiciones iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = 4$, $a_2 = 28$ y $a_3 = 32$.

Ejemplo 6.6

Resolver $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ con condiciones iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ y $a_2 = -1$.

Solución:

Ecuación característica: $t^3 - 3t^2 + 3t + 1 = (t + 1)^3 = 0 \implies t = -1$. Esta raíz tiene multiplicidad $3 = m + 1$, entonces $m = 2$.

Solución general: $a_n = B_0 n^0 (-1)^n + B_1 n^1 (-1)^n + B_2 n^2 (-1)^n$

$$\text{Aplicar condiciones iniciales: } \begin{cases} a_0 = B_0 & = 1 & B_0 = 1 \\ a_1 = -B_0 - B_1 + B_2 & = -2 & \implies B_1 = 3, \\ a_2 = B_0 + 2B_1 + 4B_2 & = -1 & B_2 = -2 \end{cases}$$

$$a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n$$

Ejemplo 6.7

Resolver $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ con condiciones iniciales $a_0 = 4$, $a_1 = 6$.

Solución:

Ecuación característica: $t^2 - 6t + 9 = (t - 3)^2 = 0 \implies t = 3$ de multiplicidad $m + 1 = 2$

Solución general: $a_n = C \cdot 3^n + D \cdot n \cdot 3^n$

$$\text{Aplicar condiciones iniciales: } \begin{cases} a_0 = C & = 4 \\ a_1 = 3C + 3D & = 6 \end{cases} \implies \begin{cases} C = 4 \\ D = -2 \end{cases}$$

$$a_n = 4 \cdot 3^n - 2 \cdot n \cdot 3^n$$

Ejemplo 6.8 (Fibonacci)

Resolver $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ con condiciones iniciales $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

Solución:

$$\text{Ecuación característica: } t^2 - t - 1 = \left(t - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \left(t + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 0 \implies t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ y } t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Solución general: } a_n = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\text{Aplicar condiciones iniciales: } \begin{cases} a_0 = A_1 + A_2 & = 0 \\ a_1 = A_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + A_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ejemplo 6.9

Resolver $a_n = 2a_{n-1} + 12a_{n-2} - 40a_{n-3} + 32a_{n-4}$ con condiciones iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ y $a_2 = -1$ y $a_3 = 0$

Solución:

$$\text{Ecuación característica: } -32 + 40t - 12t^2 - 2t^3 + t^4 = (t-2)^3(t+4) = 0 \implies t = 2 \text{ de multiplicidad } m+1 = 3 \text{ y } t = -4$$

$$\text{Solución general: } a_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n + C_3 n^2 2^n + C_4 (-4)^n$$

Aplicando condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= C_1 + C_4 &= 1 \\
 a_1 &= 2C_1 + 2C_2 + 2C_3 - 4C_4 &= -2 \\
 a_2 &= 4C_1 + 8C_2 + 16C_3 + 16C_4 &= -1 \\
 a_3 &= 8C_1 + 24C_2 + 72C_3 - 64C_4 &= 0
 \end{aligned}
 \implies
 \begin{aligned}
 C_1 &= \frac{95}{108} \\
 C_2 &= -\frac{89}{36} \\
 C_3 &= \frac{5}{6} \\
 C_4 &= \frac{13}{108}
 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{95}{108} 2^n - \frac{89}{36} n 2^n + \frac{5}{6} n^2 2^n + \frac{13}{108} (-4)^n$$

Ejercicios

6.2.1 Para cada una de las siguientes sucesiones definidas de forma recursiva, determine a_5 (o u_5); determine luego la fórmula explícita de la sucesión y utilice dicha fórmula para verificar a_5 (o u_5).

- 1) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ para $n \geq 2$ con $a_0 = -1$, $a_1 = 0$.
- 2) $u_n = -u_{n-1} + 8u_{n-2} + 12u_{n-3}$ para $n \geq 3$, $u_0 = 3$, $u_1 = -2$, $u_2 = 46$.
- 3) $u_n = u_{n-1} + u_{n-2} - u_{n-3}$ para $n \geq 3$, con $u_0 = 6$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$.
- 4) $a_n = -4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ para $n \geq 2$, con $a_0 = 3$, $a_1 = -8$.
- 5) $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ para $n \geq 2$, con $a_0 = 4$ y $a_1 = -13$.
- 6) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3}$ para $n \geq 3$, con $a_0 = 6$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 12$.
- 7) $a_n = 4a_{n-1} + 16a_{n-2} - 64a_{n-3}$ para $n \geq 2$, con $a_0 = 3$, $a_1 = 20$, $a_2 = 112$.
- 8) $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ para $n \geq 3$, con $a_0 = -1$, $a_1 = 10$ y $a_2 = -2$.
- 9) $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} - 8a_{n-3}$ para $n \geq 3$, con $a_0 = 8$, $a_1 = -6$, $a_2 = 24$.
- 10) $a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}$ para $n \geq 3$, con $a_0 = 2$, $a_1 = -4$ y $a_2 = 4$,

11) $a_n = 8a_{n-1} - 16a_{n-2}$ para $n \geq 3$, con $a_1 = 4$ y $a_2 = -16$.

12) $a_n = -6a_{n-1} - 12a_{n-2} - 8a_{n-3}$ para $n \geq 4$, con $a_1 = -4$, $a_2 = 12$, $a_3 = -48$.

13) $a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} - 8a_{n-3}$ para $n \geq 3$, con $a_0 = 4$, $a_1 = -4$ y $a_2 = -16$.

14) $a_n = a_{n-1} + 33a_{n-2} + 63a_{n-3}$ para $n \geq 3$, con $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = 6$.

15) $a_n = -4a_{n-1} + 3a_{n-2} + 18a_{n-3}$ para $n \geq 3$, con $a_0 = -1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 2$.

16) $a_n = 5a_{n-1} - 3a_{n-2} - 9a_{n-3}$ para $n \geq 3$, con $a_0 = -1$, $a_1 = -3$, $a_2 = 39$.

(B) 6.2.2 Determine la fórmula por recurrencia de la relación a_n , cuya fórmula explícita está dada por:

1) $u_n = 2(-3)^n - 5n(-3)^n$, $n \geq 0$.

2) $u_n = 2 \cdot 3^n + 2 + n$, $n \geq 0$.

3) $u_n = n \cdot 2^n - 2^n - 2$, $n \geq 0$.

4) $a_n = 5 + (-2)^n - 2^n$, $n \geq 0$.

5) $a_n = 5 \cdot 4^n - n \cdot 4^n + n + 1$, $n \geq 1$.

6) $a_n = 3^n + n \cdot 3^n + 3$, $n \geq 1$.

7) $a_n = 2n5^{n+1} + 3^n$, $n \geq 0$.

8) $a_n = 2^n + n \cdot 2^{n+1} + 2$, $n \geq 2$.

9) $a_n = 3(-1)^n - n(-1)^n - 4$, $n \geq 1$.

10) $a_n = 2(-1)^n - 2^n - 2n(-1)^n$, $n \geq 2$.

11) $a_n = 3(-2)^n - 4n(-2)^n - 3, \quad n \geq 1.$

12) $a_n = 5 - n - 3^n, \quad n \geq 2.$


13) $a_n = -5^n - 5 + 3^n, \quad n \geq 1.$


14) $a_n = 3 + 2n + 3^{n+1}, \quad n \geq 1.$


15) $a_n = 1 + 2 \cdot 3^n - 2^n, \quad n \geq 0.$


16) $a_n = (-2)^n - 2^n + 3, \quad n \geq 0.$

17) $a_n = 3 + 2^{n+1} - 3n2^n, \quad n \geq 0.$

 **6.2.3** Resolver la relación de recurrencia $a_n = 6a_{n-1} + 7a_{n-2}$ donde $a_0 = 344$ y $a_1 = 2400$.

 **6.2.4** Resolver la relación de recurrencia $a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ donde $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 1$.

 **6.2.5** Si $a_n = 2(-4)^n + 2^{n+1} - n2^n + n^22^n$, determine una relación de recurrencia para esta relación

 **6.2.6** Resolver la relación de recurrencia $a_n = 11a_{n-1} - 39a_{n-2} + 45a_{n-3}$ donde $a_0 = 5, a_1 = 11, a_2 = 25$

Estructuras algebraicas

Podemos ver las propiedades de la suma de enteros (asociatividad, existencia de neutro e inversos) no como propiedades que tengan que ver con los enteros propiamente sino como un reflejo de su **estructura algebraica**. Las propiedades de una operación definida sobre un conjunto es lo que define la **estructura algebraica del conjunto bajo esta operación**.

La estructura algebraica más importante es la estructura de *grupo*. Un grupo es un conjunto en el que se ha definido una regla de composición interna (una operación) que, esencialmente tiene las mismas propiedades algebraicas que la suma en los enteros (cerradura, asociatividad, existencia de neutro e inversos).

Históricamente el concepto de grupo se desarrolló para formalizar y estudiar las *simetrías*. La noción de grupo captura la esencia de la simetría en varios contextos. Evariste Galois (1811-1832) utilizó lo que actualmente llamamos “teoría de grupos”, para describir las simetrías de las raíces de polinomios, con lo que pudo explicar porque en general, *no es posible* obtener fórmulas para las raíces de polinomios de grado ≥ 5 en términos de radicales de los coeficientes del polinomio (como sí sucede para polinomios de grado 2, 3 y 4).

7.1 Ley de composición interna

Definición 7.1

Sea $A \neq \emptyset$. Una ley de composición interna es una función $\otimes : A \times A \rightarrow A$. La función \otimes es una operación binaria y escribimos $\otimes(a, b) = a \otimes b$.



Observe que una ley de composición interna \otimes sobre A es una *operación binaria cerrada*, es decir, $\forall a, b \in A, a \otimes b \in A$.

Ejemplo 7.1

- a.) En \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} las operaciones $+$ y \cdot son leyes de composición interna.
- b.) La operación $a \circledast b = b - a$ no es cerrada en \mathbb{N} . Por ejemplo, $5 \circledast 4 = 4 - 5 = -1 \notin \mathbb{N}$
- c.) La operación $a \circledast b = \frac{a+b}{2}$ es cerrada en \mathbb{Q} .
- d.) La operación $(a, b) \circledast (p, q) = \left(ap, \frac{1}{bq} \right)$ es cerrada en $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$.

Ejemplo 7.2

Si A es finito, a veces una operación se define sobre A usando una tabla para operar (como las tablas de multiplicar).

Sea $A = \{i, a, b, c\}$ y una operación $*$ sobre A es definida por la tabla

*	i	a	b	c
i	i	a	b	c
a	a	c	i	b
b	b	i	c	a
c	c	b	a	i

Como se observa, $i * i = i$, $a * a = c$, $a * c = b$, etc. La operación es cerrada.

Definición 7.2 (Propiedades de las operaciones binarias)

Sea \circledast una operación sobre \mathbf{G} . A la dupla $(\mathbf{G}, \circledast)$ le llamamos *una estructura algebraica*.

- a.) La operación es **cerrada** si $a \circledast b \in \mathbf{G}$, para todo $a, b \in \mathbf{G}$
- b.) La operación es **asociativa** si $a \circledast (b \circledast c) = (a \circledast b) \circledast c$, para todo $a, b, c \in \mathbf{G}$
- c.) Elemento **neutro**: Si existe $e \in \mathbf{G}$ tal que $a \circledast e = e \circledast a = a$, para todo $a \in \mathbf{G}$, a e se le llama **neutro**.
- d.) **Inversos**: Si para $a \in \mathbf{G}$ existe $b \in \mathbf{G}$ tal que $a \circledast b = b \circledast a = e$, entonces b es inverso de a y se escribe $b = a^{-1}$.
- e.) La operación es **conmutativa** si $a \circledast b = b \circledast a$ para todo $a, b \in \mathbf{G}$

N

En realidad “estructura algebraica” se refiere a las propiedades que tiene (o no tiene) la operación \otimes sobre \mathbf{G} . Estas propiedades definen la “estructura algebraica” del conjunto respecto a la operación.

Definición 7.3

- 1) $(\mathbf{G}, *)$ se dice que tiene estructura de *semigrupo* si $*$ es una ley de composición interna (cerrada) y asociativa.
- 2) $(\mathbf{G}, *)$ se dice que tiene estructura de *monoide* si $*$ es una ley de composición interna (cerrada), asociativa y además existe (un único) elemento neutro $e \in \mathbf{G}$

Ejemplo 7.3

- a.) Si $\mathbf{H} = \{4k + 1 \text{ tal que } k \in \mathbb{N}\}$, entonces (\mathbf{H}, \cdot) es un semigrupo (conmutativo)
- b.) (\mathbb{N}, \cdot) es un monoide.

Otras definiciones. Consideremos la estructura algebraica (\mathbf{G}, \otimes)

- a.) $a \in \mathbf{G}$ es **idempotente** si $a \otimes a = a$
- b.) Si la operación \otimes admite un neutro en \mathbf{G} , se dice que $a \in \mathbf{G}$ es **involutivo** si $a \otimes a = e$
- c.) $a \in \mathbf{G}$ es **absorbente** en \mathbf{G} si $a \otimes x = x \otimes a = a, \forall x \in \mathbf{G}$

Ejemplo 7.4

- a.) La operación $a \otimes b = \frac{a+b}{2}$, ¿es asociativa en \mathbb{Q} ?

Solución: Hay que verificar si se cumple o no se cumple la condición de asociatividad.

$$a \otimes (b \otimes c) = a \otimes \frac{b+c}{2} = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a + b + c}{4}$$

$$(a \otimes b) \otimes c = \frac{a+b}{2} \otimes c = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$$

Así que si $a \neq c$ entonces $a \otimes (b \otimes c) \neq (a \otimes b) \otimes c$. La operación no es asociativa.

b.) Sobre \mathbb{R} se define la operación $a \otimes b = a + b + ab$. ¿Existe un elemento neutro?

Solución: Si un neutro $e \in \mathbb{R}$ existe, debería cumplir $e \otimes a = a \otimes e = a$. Veamos

$$e \otimes a = e + a + ea = a \implies e(1+a) = 0. \therefore \forall a \in \mathbb{R}, e \otimes a = a \text{ si } e = 0.$$

$$a \otimes 0 = 0 + a + 0 \cdot a = a$$

$\therefore e = 0$ es el elemento neutro en la estructura algebraica (\mathbb{R}, \otimes) .

7.2 Grupos

Definición 7.4

La estructura algebraica $(\mathbf{G}, *)$ es un grupo si

- 1) $*$ es cerrada en \mathbf{G}
- 2) $*$ es asociativa en \mathbf{G}
- 3) Existe $e \in \mathbf{G}$ tal que $a * e = e * a = a$, para todo $a \in G$. Al elemento e se le llama "elemento neutro" de \mathbf{G} respecto a $*$ y se demuestra, más adelante, que es único.
- 4) Para todo $a \in \mathbf{G}$ existe un inverso, $a^{-1} \in \mathbf{G}$ tal que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, donde e es el elemento neutro.

Si $*$ es conmutativa, $(\mathbf{G}, *)$ se dice "grupo abeliano"

Teorema 7.1

Si $(\mathbf{G}, *)$ es un grupo, entonces

- a.) El neutro e es único
- b.) Si $a \in \mathbf{G}$, el inverso $a^{-1} \in \mathbf{G}$ es único
- c.) *Cancelación:* $\forall a, b, x \in \mathbf{G}, a * x = b \implies x = a^{-1} * b$ y $x * a = b \implies x = b * a^{-1}$. En ambos casos, la solución es única.

d.) $(a^{-1})^{-1} = a$

e.) $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

f.) $a^2 = a * a = a \implies a = e$ (en un grupo solo hay un elemento idempotente).

g.) $a * b = a \implies b = e$ y si $a^2 = a * a = a \implies a = e$.

Demostración:a.) El neutro e es único pues si hubiera otro neutro $e' \in \mathbf{G}$, entonces $e * e' = e = e' * e = e'$. $\therefore e = e'$

La demostración de las otras afirmaciones queda como ejercicio.

Potencias. Sea $(\mathbf{G}, *)$ un grupo y $a \in \mathbf{G}$. Entonces la notación a^n se usa para las potencias usuales, es decir,

$$a^n = \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n \text{ veces}}$$

Definimos $a^0 = e$ y $(a^n)^{-1} = a^{-n}$ donde a^{-n} es el inverso de a^n . En particular se puede probar por inducción que $a^m * a^n = a^{m+n}$ y $(a^m)^n = a^{nm}$ **Ejemplo 7.5**Sobre \mathbb{R}^* se define la operación $a * b = 2ab$. Verifique que $(\mathbb{R}^*, *)$ es un grupo conmutativo.**Solución:**a.) **Cerradura:** $a * b = 2ab \in \mathbb{R}^*$ pues $a, b \neq 0$.

b.) **Asociatividad:**
$$\begin{cases} a * (b * c) = a * 2bc = 4abc \\ (a * b) * c = 2ab * c = 4abc \end{cases} \checkmark$$

c.) **Neutro:**
$$\begin{cases} a * e = a \implies a = 2ae \implies e = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} * a = a \end{cases}$$

d.) **Inversos:**
$$\begin{cases} a * a' = 2aa' = \frac{1}{2} \implies a' = \frac{1}{4a} \text{ pues } a \neq 0 \\ \frac{1}{4a} * a = 2 \frac{1}{4a} a = \frac{1}{2} \therefore \forall a \in \mathbb{R}^*, a^{-1} = \frac{1}{4a} \end{cases} \checkmark$$

e.) El grupo $(\mathbf{G}, *)$ es conmutativo pues $a * b = b * a = 2ab$.

Ejemplo 7.6

Sea $\mathbf{G} = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ tal que } a \neq 0\}$ y $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$. Verifique que $(\mathbf{G}, *)$ es un grupo no conmutativo.

Solución:

a.) **Cerradura:** $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b) \in \mathbf{G}$ pues $ac \neq 0$.

b.) **Asociatividad:**
$$\begin{cases} (a, b) * ((c, d) * (p, q)) = (acp, acq + ad + b) \\ ((a, b) * (c, d)) * (p, q) = (acp, acq + ad + b) \end{cases} \checkmark$$

c.) **Neutro:**
$$\begin{cases} (a, b) * (e_1, e_2) = (a, b) \implies (a \cdot e_1, a \cdot e_2 + b) = (a, b) \implies (e_1, e_2) = (1, 0) \\ (e_1, e_2) * (a, b) = (1, 0) * (a, b) = (a, b) \end{cases}$$

d.) **Inversos:**
$$\begin{cases} (a, b) * (a', b') = (1, 0) \implies (a', b') = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) \text{ pues } a, b \neq 0. \\ \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) * (a, b) = (1, 0). \quad \therefore \forall (a, b) \in \mathbf{G}, (a, b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right). \end{cases} \checkmark$$

e.) El grupo $(\mathbf{G}, *)$ no es conmutativo pues $(a, b) * (c, d) = (ac, ad + b)$ pero $(c, d) * (a, b) = (ac, bc + d)$

Ejemplo 7.7

Sea $\mathbf{A} = \{i, a, b, c\}$ y una operación $*$ sobre \mathbf{A} definida por la tabla que sigue. Verifique que $(\mathbf{A}, *)$ es un grupo conmutativo y calcule $(a * b^3)^{-2} * c^3$

*	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>i</i>	<i>i</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
<i>a</i>	<i>a</i>	<i>c</i>	<i>i</i>	<i>b</i>
<i>b</i>	<i>b</i>	<i>i</i>	<i>c</i>	<i>a</i>
<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>i</i>

Solución:

a.) **Cerradura:** En la tabla se observa que la operación solo da como resultados elementos de \mathbf{A} .

b.) **Asociatividad:** Se requiere verificar las 4^3 identidades $a_i * (a_j * a_k) = (a_i * a_j) * a_k$. En este curso no vamos a hacer todas estas verificaciones dado la cantidad de combinaciones. En general se indicará, si es conveniente, que la operación es asociativa en este conjunto.

Hay un algoritmo para hacer esto, llamado "Light's associativity test" ([7, pág. 8]). El algoritmo compara las tablas de dos operaciones " \circ " y " \odot " definidas por

$$x \circ y = x * (a * y) \quad \text{y} \quad x \odot y = (x * a) * y$$

para todos los $a \in \mathbf{A}$. Si coinciden, la operación es asociativa. Sin embargo no hay que hacer todas las tablas, porque se pueden ver usando las filas $x * a$ y las columnas $a * y$ y hay simplificaciones adicionales usando propiedades de semigrupos.

- c.) **Neutro:** Debemos buscar en la tabla una fila y la respectiva columna donde se hay una copia de $i a b c$

*	i	a	b	c
i	i	a	b	c
a	a	c	i	b
b	b	i	c	a
c	c	b	a	i

Por tanto $e = i$ es el elemento neutro.

- d.) **Inversos:** Para obtener los inversos, debemos buscar el neutro en la tabla

*	i	a	b	c
i	i	a	b	c
a	a	c	i	b
b	b	i	c	a
c	c	b	a	i

De esta manera obtenemos que $i^{-1} = i$, $a^{-1} = b$, $b^{-1} = a$ y $c^{-1} = c$

- e.) La conmutatividad se sigue de la simetría de la tabla respecto a la diagonal

- f.) Observemos que $c^2 = i \implies c^{2k} = (i)^{2k} = i$, $c^{2k+1} = c^{2k} * c = c$ y $c^{-1} = c$. Ahora,

$$(a * b^3)^{-50} * c^3 = (a * a)^{-50} * c^3 = (c)^{-50} * c^3 = i * c = c.$$

Ejemplo 7.8

Verifique que $\mathbb{R} - \{-1\}$ con la operación $a \otimes b = a + b + ab$, es un grupo abeliano.

Solución:

- a.) **Cerradura:** Si $a, b \in \mathbb{R} - \{-1\}$ es claro que $a \otimes b = a + b + ab \in \mathbb{R}$. Solo falta probar

que $a \otimes b = a + b + ab \in \mathbb{R} - \{-1\}$, es decir, $a + b + ab \neq -1$. Para probar esto, observe que

$a + b + ab = -1 \iff a + b + ab + 1 = 0 \iff (a + 1)(b + 1) = 0$, lo cual es imposible, pues $a, b \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

$$\text{b.) Asociatividad: } \begin{cases} (a \otimes b) \otimes c = (a + b + ab) \otimes c = a + b + ab + c + (a + b + ab)c \\ a \otimes (b \otimes c) = a \otimes (b + c + bc) = a + b + c + bc + a(b + c + bc) \end{cases}$$

Desarrollando se verifica que las dos expresiones son iguales.

c.) **Conmutatividad:** $a \otimes b = a + b + ab = b + a + ba = b \otimes a$ pues la suma y el producto son conmutativas en \mathbb{R} .

d.) **Neutro:** Por el ítem anterior, solo necesitamos resolver la ecuación $a \otimes e = a$.

$$a \otimes e = a \iff a + e + ae = a \iff e(a + 1) = 0 \iff e = 0 \text{ pues } a \in \mathbb{R} - \{-1\}.$$

e.) **Inversos:** Por el ítem anterior, solo necesitamos resolver la ecuación $a \otimes \bar{a} = e = 0$.

$$a \otimes \bar{a} = 0 \iff a + \bar{a} + a\bar{a} = 0 \iff \bar{a}(1 + a) = -a \implies \bar{a} = -\frac{a}{1+a} \in \mathbb{R} - \{-1\} \text{ pues } -\frac{a}{1+a} \neq -1. \text{ Como } a \neq -1, \text{ todos los elementos de } \mathbb{R} - \{-1\} \text{ tienen inverso.}$$

Ejemplo 7.9

En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define la operación $*$ como

$$(a, b) * (c, d) = (a + c + 3, 2bd)$$

Si se sabe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, *)$ es un grupo abeliano, entonces

a.) calcule (x, y) tal que $(x, y) * (2, -3)^{-2} = (2, 0)$

b.) calcule $(-4, 1)^3 * \left[\left(1, \frac{4}{3}\right) * (2, -3)^{-2} \right]^2$

Solución:

a.) $(x, y) * (2, -3)^{-2} = (2, 0) \implies (x, y) = (2, 0) * (2, -3)^2 = (2, 0) * (7, 18) = (12, 0)$

b.) $(-4, 1)^3 = (-4, 1) * (-4, 1) * (-4, 1)$
 $= (-4 + -4 + 3, 2 \cdot 1 \cdot 1) * (-4, 1)$
 $= (-5, 2) * (-4, 1) = (-6, 4)$

Para calcular $(2, -3)^{-2}$ requerimos calcular el neutro (e_1, e_2) para poder calcular inversos.

a.) **Neutro:** $(a, b) * (e_1, e_2) = (a, b) \implies (e_1, e_2) = \left(-3, \frac{1}{2}\right)$

b.) **Inversos:** $(a, b) * (a', b') = \left(-3, \frac{1}{2}\right) \implies (a', b') = (a, b)^{-1} = \left(-6 - a, \frac{1}{4b}\right)$ pues $b \in \mathbb{R}^*$

c.) $(-4, 1)^3 * \left[\left(1, \frac{4}{3}\right) * (2, -3)^{-2}\right]^2 = (-6, 4) * \left[\left(1, \frac{4}{3}\right) * \left(-13, \frac{1}{72}\right)\right]^2 = (-6, 4) * \left(-9, \frac{1}{27}\right)^2 = \left(-18, \frac{16}{729}\right)$

7.2.1 Los grupos $(\mathbb{Z}_m, +)$ y (\mathbb{Z}_m^*, \cdot)

Recordemos que sobre \mathbb{Z} , si $m > 1$, la relación “ $a \equiv_m b$ ” (a es congruente con “ b ” módulo m), es una relación de equivalencia. Dos enteros están relacionados si dejan el mismo residuo positivo al dividir por m .

El “Algoritmo de Euclides”, establece que si $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m > 1$, entonces existe un “residuo”¹ $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = qm + r$ con $0 \leq r < m$. El “Algoritmo de Euclides” dice que al dividir n por m , solo hay $m - 1$ posibles residuos no negativos, a saber: $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$.

Por ejemplo, en el contexto del algoritmo de Euclides,

- Al dividir por n por $m = 2$ solo se puede tener a $r = 0$ como residuo (si n es par) o $r = 1$ (si n es impar).
- Al dividir por n por $m = 3$ solo se puede tener a $r = 0$ como residuo (si $n = 3k$), $r = 1$ (si $n = 3k + 1$) o $r = 2$ (si $n = 3k + 2$).

Observemos que $a \equiv_m b$ si y solo si a y b dejan el mismo residuo, al dividirlos por m . En efecto, si $a = mk_1 + r$ y $b = mk_2 + r$ entonces $b - a = m \cdot (k_2 - k_1)$. Además, usando el criterio de la relación,

Un entero es congruente con el residuo que deja al dividir por m : $a \equiv_m r$

En conclusión, si $a = mk + r$ con $0 \leq r < m$, entonces $a \in \bar{r}$. Por ejemplo,

- Si $m = 2$, entonces los pares están en la clase $\bar{0}$ y los impares en la clase $\bar{1}$
- Si $m = 7$, entonces $9 \equiv_7 2$ pues $9 = 7 \cdot 1 + 2$. y $11 \equiv_7 4$ pues $11 = 7 \cdot 1 + 4$.

El conjunto cociente de la relación \equiv_m se puede tomar como los residuos $0 \leq r \leq m - 1$, es decir, $\mathbb{Z} / \equiv_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\}$

Se acostumbra escribir \mathbb{Z}_m en vez de \mathbb{Z} / \equiv_m . Es decir,

$$\mathbb{Z}_m = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{m-1}\} \text{ o simplemente (abusando del lenguaje) } \mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$$

¹En este caso usamos un sistema de residuos ≥ 0 (en otros contextos, otro tipo de residuos puede ser mejor).

Adición y multiplicación en \mathbb{Z}_m

a.) La adición en \mathbb{Z}_m es $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$.

Por ejemplo en $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{4}\}$,

- $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$ pues $5 \equiv_5 0$
- $\bar{4} + \bar{2} = \bar{1}$ pues $6 \equiv_5 1$
- $\bar{1} + \bar{2} = \bar{3}$ pues $3 \equiv_5 3$

La tabla de sumar completa sería

$(\mathbb{Z}_5, +)$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

b.) La multiplicación en \mathbb{Z}_m es $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$.

Por ejemplo en $\mathbb{Z}_7^* = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$,

- $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6}$ pues $6 \equiv_7 6$
- $\bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{1}$ pues $8 \equiv_7 1$
- $\bar{4} \cdot \bar{3} = \bar{5}$ pues $12 \equiv_7 5$

La tabla de multilicar completa sería

(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Orden de un grupo. El orden de un grupo finito $(G, *)$ es $\text{ord}(G) = |G|$, es decir, su cardinalidad.

Teorema 7.2

Sea $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$.

- $(\mathbb{Z}_m, +)$ es un grupo "aditivo" de orden m
- (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) es un grupo "multiplicativo" de orden $m - 1$

En $(\mathbb{Z}_m, +)$ el neutro es $\bar{0}$ y en (\mathbb{Z}_m^*, \cdot) el neutro es $\bar{1}$.

Ejercicios

7.2.1 Sea \mathbf{G} un conjunto no vacío y $*$ una operación interna en \mathbf{G} , tal que $(\mathbf{G}, *)$ es un grupo. Sea $(\mathbf{H}, *)$ un subgrupo de $(\mathbf{G}, *)$. Demuestre que si $a \in wtxtH$ y $a * b \in wtxtH$ entonces $b \in H$.

7.2.2 Si $\mathcal{P}(E)$ denota el conjunto de partes de E , con E no vacío, tal que sobre dicho conjunto se define la operación $A * B = A \cup B$, analice las propiedades que cumple $(\mathcal{P}(E), *)$ e indique si tiene la estructura de grupo.

7.2.3 Si $\mathcal{P}(E)$ denota el conjunto de partes de E , con E no vacío, tal que sobre dicho conjunto se define la operación $A * B = A \cap B$, analice las propiedades que cumple $(\mathcal{P}(E), *)$ e indique qué tipo de estructura es.

7.2.4 En una estructura algebraica $(\mathbf{E}, *)$ que posee elemento neutro e , se dice que a es un elemento involutivo si $a * a = e$. Calcule todos los elementos involutivos de $(\mathbb{R}^*, *)$, con $a * b = 5ab$.

7.2.5 Sea $(\mathbf{G}, *)$ un grupo con neutro e . Determine x de forma que se satisfaga que $b * c * x^2 * a = c * x * a$.

7.2.6 Pruebe que $(\mathbb{R} \perp \mathbb{R}^+, \perp)$ es grupo abeliano si $(a, b) \perp (c, d) = (a + c + 5, 3bd)$.

7.2.7 Pruebe que (\mathbb{R}^*, \otimes) es un grupo abeliano y calcule $2 \otimes 3 \otimes 5^{-1}$ si $a \otimes b = 7ab$.

7.2.8 Pruebe que (\mathbb{R}^*, \otimes) es un grupo abeliano y calcule $(2 \otimes 3) \otimes (1 \otimes (5/2)^{-1})$ si $a \otimes b = -3ab$.

7.2.9 En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define $(a, b) \otimes (c, d) = (a + c - 4, 2bd)$. Pruebe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ es grupo abeliano y calcule $(2, -1)^2 \otimes \left[\left(0, \frac{1}{3}\right) \otimes (1, -1)^{-1} \right]$.

7.2.10 Pruebe que (\mathbb{Z}, \oplus) es grupo abeliano y calcule $(5 \oplus 3^{-1})^2 \oplus [7^{-3} \oplus 2 \oplus (-3)]$ si $a \oplus b = 3 + a + b$.

7.2.11 En $\mathbb{R} - \{-1\}$ se define $a * b = a + b + ab$. Pruebe que es grupo abeliano y calcule:

$$(5 * 3^{-1})^2 * [7^{-3} * 2 * (-3)]^{-1} * (4 * 2^{-1})^2 * [5^{-3} * 3 * (-2)]^{-2}$$

7.2.12 Pruebe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \boxtimes)$ es un monoide conmutativo si

$$(x, y) \boxtimes (z, w) = (x + z + xz, yw/6)$$

7.2.13 Pruebe que (\mathbb{R}^*, \otimes) es un grupo abeliano y si $a \otimes b = 5ab$, determine

$$[3^{-2} \otimes 1^3] \otimes 4^2$$

7.2.14 En $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se define $(a, b) \otimes (c, d) = (3ac, b + d - 2)$. Si se sabe que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$ es un grupo abeliano, calcule $[(2, 3)^2 \otimes (-1, -1)]^{-1} \otimes (1, -2)^{-3}$.

7.2.15 En $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se define $(a, b) \otimes (c, d) = (2ac, b + d - 1)$. Si se sabe que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$ es un grupo abeliano y además se sabe que el elemento neutro de la estructura es $(\frac{1}{2}, 1)$, calcule

- la fórmula de $(a, b)^{-1}$
- $[(1, 5)^3 \otimes (-2, 3)]^{-2}$.

7.2.16 En \mathbb{R}^* se define $a \otimes b = 6ab$. Pruebe que es un grupo abeliano.

7.2.17 Pruebe que (\mathbb{R}, \star) es un grupo abeliano si $a \star b = a + b + 5$.

7.2.18 En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define $(a, b) \otimes (c, d) = (a + c - 1, 2bd)$. Si se sabe que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ es un grupo abeliano, calcule:

- el elemento neutro
- la fórmula del inverso de (a, b) , es decir $(a, b)^{-1} = (i_1, i_2)$.

7.2.19 En \mathbb{R} se define $a \star b = a + b - \frac{1}{2}$. Pruebe que es un grupo abeliano.

7.2.20 Si $(\mathbf{G}, *)$ es un grupo, demuestre que $(\mathbf{G}, *)$ es grupo abeliano si y solo si $(a * b)^2 = a^2 * b^2$, para todos $a, b \in G$.

7.2.21 En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ se define $(a, b) \otimes (c, d) = \left(a + c - 3, \frac{bd}{2}\right)$.

- Demuestre que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ es grupo abeliano.
- Calcule el valor de $(5, 2)^{-2} \otimes [(3, 7) \otimes (5, 2)^{-1}]^{-1}$.
- ¿Es $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \otimes)$ grupo abeliano? Justifique.

7.2.22 Demuestre que (\mathbb{R}, \perp) con la operación $a \perp b = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$ es grupo abeliano y calcule $5^{-2} \perp 2^3$.

7.2.23 Sea $(\mathbf{G}, *)$ un grupo y a un elemento de \mathbf{G} . Si se cumple que

$$\forall y \in G \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a^n = y,$$

demuestre que \mathbf{G} es abeliano.

7.2.24 Indique el tipo de estructura de $(\mathbb{N}, *)$ si $a * b = a + b + ab$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dotsc\}$.

7.2.25 Si $(\mathbb{R}^+, *)$ es un grupo abeliano con $a * b = \frac{ab}{2}$, determine:

- 1) El elemento neutro de en $(\mathbb{R}^+, *)$.
- 2) a^{-1} para $a \in \mathbb{R}^+$.
- 3) $\frac{2}{3} * \left[3^2 * \frac{4}{7} \right]^{-1}$.

7.2.26 Sea $\mathbf{G} = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{R} \text{ y } a \neq 0 \right\}$. Se define la operación \circ sobre \mathbf{G} de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{bmatrix}$$

verifique que (\mathbf{G}, \circ) tiene estructura de grupos. ¿Es abeliano?

7.2.27 Sea $A = \{a, b, c, m, n, o\}$. Si se sabe que $(A, *)$ es un grupo y la tabla de operación está dada por:

*	a	b	c	m	n	o
a	b	c	a	n	o	m
b	c	a	b	o	m	n
c	a	b	c	m	n	o
m	n	o	m	a	b	c
n	o	m	n	b	c	a
o	m	n	o	c	a	b

- 1) Determine el elemento neutro y el inverso de cada elemento del grupo.
- 2) Determine si $W = \{c\}$ es un subgrupo de A .
- 3) Determine si $W = \{m, c, o\}$ es un subgrupo de A .

7.2.28 Considere el conjunto \mathbb{Z}_{11}^* , con la operación interna \odot como la multiplicación usual de clases de equivalencia.

- 1) Determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento.
- 2) Calcule $[5^{-2} \odot 6^3]^{-1} \odot (2 \odot 8)^4$.
- 3) Calcule $[(\overset{\cdot}{7})^6 \odot \overset{\cdot}{4}]^{-4} \odot [\overset{\cdot}{9} \odot (\overset{\cdot}{3})^{-7}]^4$.
- 4) Determine todos los subgrupos.

7.2.29 Considere el conjunto \mathbb{Z}_7^* , con la operación interna \odot como la multiplicación usual de clases de equivalencia.

- 1) Construya la tabla de operación para el grupo (\mathbb{Z}_7^*, \odot) .
- 2) Determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento del grupo.
- 3) Determine $[(\dot{4})^{-2} \odot \dot{5}] \odot (\dot{3})^{30}$.
- 4) Determine todos los subgrupos.

7.2.30 Considere el conjunto \mathbb{Z}_8 , con la operación interna \oplus como la adición usual de clases de equivalencia. Para el grupo (\mathbb{Z}_8, \oplus) determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento. Determine además todos los subgrupos.

7.2.31 Considere el conjunto \mathbb{Z}_{13}^* , con la operación interna \odot como la multiplicación usual de clases de equivalencia.

- 1) Determine el elemento neutro y los inversos de cada elemento del grupo.
- 2) Calcule $[(\dot{8})^6 \odot \dot{3}]^{-4} \odot [\dot{9} \odot (\dot{2})^{-5}]^3$.
- 3) Determine todos los subgrupos.

7.2.32 Sobre el conjunto $\mathbf{A} = \{m, a, t, e, d, i, s, c, r, 7\}$ se define la operación $*$ según la siguiente tabla:

$*$	m	a	t	e	d	i	s	c	r	7
m	a	e	s	i	7	d	r	m	c	t
a	e	i	r	d	t	7	c	a	m	s
t	s	r	i	c	a	m	d	t	7	e
e	i	d	c	7	s	t	m	e	a	r
d	7	t	a	s	c	r	e	d	i	m
i	d	7	m	t	r	s	a	i	e	c
s	r	c	d	m	e	a	7	s	t	i
c	m	a	t	e	d	i	s	c	r	7
r	c	m	7	a	i	e	t	r	s	d
7	t	s	e	r	m	c	i	7	d	a

Asuma que $(\mathbf{A}, *)$ es un grupo abeliano.

- 1) Para esta estructura algebraica, determine el neutro y los inversos de cada elemento de \mathbf{A} .
- 2) Calcule: $(m^{-2} * 7)^2$ y $(a * t^{-1})^{1000}$.

7.2.33 En el conjunto $\mathbf{D} = \{a, b, c, d, e, f\}$ se define la operación interna por medio de la tabla:

\star	a	b	c	d	e	f
a	e	d	f	b	a	c
b	f	e	d	c	b	a
c	d	f	e	a	c	b
d	c	a	b	f	d	e
e	a	b	c	d	e	f
f	b	c	a	e	f	d

1) Determine todos los subgrupos del grupo (\mathbf{D}, \star) .

2) Calcule el resultado de $(a^3 \star f^{-2})^{-1} \star b$.

7.2.34 En el grupo abeliano $(\mathbb{Z}_{18}, \oplus)$, con \oplus la suma usual de clases de equivalencia, calcule $13 \oplus [4 \oplus (2)^{-3}]^2$.

7.2.35 Calcule un subgrupo de orden 4 del grupo $(\mathbb{Z}_{17}^*, \odot)$.

7.2.36 Sobre el conjunto $\mathbf{E} = \{a, b, c, d\}$ se define \star por medio de la tabla de operación:

\star	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	c	d
c	a	c	d	b
d	a	d	b	b

Determine si en (\mathbf{E}, \star) la operación \star

- 1) es asociativa
- 2) es conmutativa
- 3) posee elemento neutro
- 4) satisface la propiedad de los inversos.

7.2.37 Considere el conjunto $A = \{\alpha, \beta, \varepsilon, \theta, \lambda, \omega\}$. Sobre A se define la operación \perp :

\perp	α	β	ε	θ	λ	ω
α	α	β	ε	θ	λ	ω
β	β	θ	ω	α	ε	λ
ε	ε	ω	β	λ	α	θ
θ	θ	α	λ	β	ω	ε
λ	λ	ε	α	ω	θ	β
ω	ω	λ	θ	ε	β	α

Si se sabe que (A, \perp) es asociativa:

- 1) Demuestre que (A, \perp) es grupo abeliano.
- 2) Calcule el resultado de la operación $[(\alpha \perp \beta^{-1})^{-1} \perp (\lambda^3 \perp \theta)]^{-2}$.
- 3) Determine los elementos absorbentes, idempotentes e involutivos de (A, \perp) , si existen.
- 4) Determine todos los subgrupos de (A, \perp) .

7.2.38 En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se define:

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	6	4	5
3	3	1	1	5	6	4
4	4	6	5	1	3	2
5	5	4	6	2	1	3
6	6	5	4	3	2	1

Usando el hecho de que $(A, *)$ es grupo:

- 1) Determine si $(A, *)$ es abeliano.
- 2) Determine el inverso de cada elemento.
- 3) Determine los subgrupos de $(A, *)$.

7.2.39 En \mathbb{N} se define la operación $a \vee b = \min\{a, b\}$. ¿Es (\mathbb{N}, \vee) un grupo?

7.2.40 Sea $A \neq \emptyset$. En el conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$ se define la operación $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$. ¿Es $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ un grupo?

7.2.41 Sean $(\mathbf{G}_1, *)$ y (\mathbf{G}_2, \circ) grupos. Sobre $\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$ se define la operación $(a, b) \odot (p, q) = (a * p, b \circ q)$. ¿Es $(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2, \odot)$ un grupo?

7.2.42 Sobre $A = \{a, b, c, d\}$ se define la operación $*$ por medio de la tabla que sigue. ¿Es $(A, *)$ un grupo?

$*$	a	b	c	d
a	c	d	b	a
b	d	c	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

7.2.43 Verifique, usando las tablas, que $(\mathbb{Z}_5, +)$ y (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) son grupos.

$(\mathbb{Z}_5, +)$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

7.2.44 Realice la tabla de multiplicación para (\mathbb{Z}_4^*, \cdot) y determine si es un grupo.

7.2.45 Realice la tabla de adición para $(\mathbb{Z}_4, +)$ y determine el neutro y los inversos.

7.2.46 Sea $A = \{a, b, c\}$ con la operación $x * y = y$. Realice la tabla de operación para $(A, *)$. ¿Qué propiedades tiene esta operación?

7.2.47 Sea $F = \{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$. Considere la estructura (F, \cdot) , es decir, F con la multiplicación usual.

a.) Verifique que **no existen** $p, q \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$. (Sugerencia: Razone por contradicción, suponga que la fracción está totalmente simplificada y que $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Luego deduzca que p, q deberían ser pares!).

b.) Hay elemento neutro, determine cuál es.

c.) Verifique que el inverso de $p + q\sqrt{2}$ es $\frac{p}{p^2 - rq^2} + \frac{-q}{p^2 - rq^2}\sqrt{2}$. Observe que por el ítem a.), este inverso está bien definido para cualquier $p, q \in \mathbb{Q}$.

7.3 Subgrupos

Definición 7.5

Consideremos un grupo (\mathbf{G}, \circ) . Si \mathbf{H} es subconjunto no vacío de \mathbf{G} , tal que (\mathbf{H}, \circ) es grupo, entonces decimos que \mathbf{H} es subgrupo del grupo \mathbf{G} y usamos la notación $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$.

Subgrupos triviales. Los subgrupos triviales de (\mathbf{G}, \circ) son $\mathbf{H} = \{e\}$ y $\mathbf{H} = \mathbf{G}$.

Los subconjuntos de \mathbf{G} “heredan” la asociatividad, entonces en principio, para probar que \mathbf{H} es subgrupo de \mathbf{G} , se requiere que la operación sea cerrada en \mathbf{H} , que el neutro esté en \mathbf{H} y que los inversos de los elementos de \mathbf{H} estén en \mathbf{H} .

Ejemplo 7.10

Consideremos el grupo $(\mathbf{A}, *)$

$*$	i	a	b	c
i	i	a	b	c
a	a	c	i	b
b	b	i	c	a
c	c	b	a	i

Determinemos los subgrupos propios de $(\mathbf{A}, *)$

- a.) $\mathbf{H}_1 = \{i\}$ pues i es el neutro.
- b.) $\mathbf{H}_2 = \{i, c\}$ pues c es inverso de sí mismo. De esta manera, en este conjunto la operación es cerrada pues $c * i \in H_2$, y $c * c \in H_2$
- c.) $\mathbf{H}_3 = \{i, a, b\}$ no es subgrupo pues aunque b es el inverso de a , sucede que $a * a = c$ y $c \notin H_3$

En el siguientes teoremas establecen criterios para decidir si un subconjunto es un subgrupo o no.

Teorema 7.3

Sea $(\mathbf{G}, *)$ un grupo. Entonces $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$ si y sólo si para todo $a, b \in \mathbf{H}$ se cumple: $a * b^{-1} \in \mathbf{H}$

Demostración:

a.) $e \in \mathbf{H}$ pues como $a \in \mathbf{H}$ y $a \in \mathbf{H} \implies a * a^{-1} = e \in \mathbf{H}$.

b.) Si $a \in \mathbf{H}$ entonces como $e, a \in \mathbf{H} \implies e * a^{-1} = a^{-1} \in \mathbf{H}$

c.) Si $a, b \in \mathbf{H} \implies a, b^{-1} \in \mathbf{H} \implies a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in \mathbf{H}$

La asociatividad de la operación $*$ en \mathbf{H} la hereda de \mathbf{G} . ■

Si \mathbf{G} es finito entonces la caracterización de los subgrupos $\mathbf{H} \neq \emptyset$ es menos restrictiva. Como \mathbf{H} es finito, si $a \in \mathbf{H}$ entonces las potencias $a, a^2, a^3, \dots, a^k, \dots$ son elementos de \mathbf{H} y en algún momento se repiten, es decir, existe $r, s \in \mathbb{N}$ tal que $a^r = a^s$, esto permite verificar el siguiente

Teorema 7.4

Sea $(\mathbf{G}, *)$ un grupo *no necesariamente finito*. Si $\mathbf{H} \neq \emptyset$ es un subconjunto *finito* de \mathbf{G} , entonces $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$ si y sólo si para todo $a, b \in \mathbf{H}$ se cumple: $a * b \in \mathbf{H}$

Demostración: Si $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$, entonces claramente se cumple el teorema. Veamos la otra dirección.

Queremos verificar que $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$. Por hipótesis, $a, b \in \mathbf{H}$ se cumple: $a * b \in \mathbf{H}$, es decir la operación es cerrada en \mathbf{H} . Sea $n = |\mathbf{H}|$ y $a \in \mathbf{H}$, entonces $\{a, a^2, a^3, \dots, a^{n+1}\} \subseteq \mathbf{H}$. Como \mathbf{H} es finito de orden n , existen r, s con $1 \leq s < r \leq n + 1$ tal que $a^r = a^s$, de aquí se sigue que

a.) $a^r = a^s \implies a^r = a^r * a^{s-r}$, entonces por *cancelación*, $a^{s-r} = e \in \mathbf{H}$ (observe que $s - r \in \mathbb{N}$)

b.) $a^{s-r} = e \implies a^{-1} = a^{s-r-1} \in \mathbf{H}$ pues $s - r - 1 \in \mathbb{N}$

La asociatividad de la operación $*$ en \mathbf{H} la hereda de \mathbf{G} . ■

Ejemplo 7.11

Consideremos el grupo $(\mathbf{G}, *)$ con un subgrupo $\mathbf{H} = \{a, b, c, d\}$ con tabla de "multiplicar"

*	a	b	c	d
a	c	d	b	a
b	d	c	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

Por ejemplo, $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5\} = \{a, c, b, d, a\}$. Entonces

a.) $a^1 = a^5 \implies a^{5-1} = a^4 = d$ es el neutro

b.) $a^{-1} = a^{5-1-1} = a^3 = b$

Además de que un subconjunto no vacío de orden finito es subgrupo si la operación es cerrada en él, también tenemos otro teorema para saber qué subconjuntos considerar como subgrupos solamente viendo su orden.

Teorema 7.5 (Teorema de Lagrange)

- a.) Si a es elemento de un grupo finito $(\mathbf{G}, *)$ de orden n , es decir $|\mathbf{G}| = n$, entonces $a^n = e$.
- b.) Si $(\mathbf{G}, *)$ es un grupo de orden n y si $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$ entonces el orden de \mathbf{H} divide el orden de \mathbf{G} .

Si \mathbf{H} es un subconjunto de \mathbf{G} y el orden de \mathbf{H} divide el orden de \mathbf{G} , no significa que sea un subgrupo! El teorema solo da condiciones necesarias para que \mathbf{H} sea subgrupo de \mathbf{G} .

En cálculos de potencias de elementos de \mathbf{G} se puede usar $a^{\text{Ord}(\mathbf{G})} = e$.

Ejemplo 7.12

- a.) $(\mathbb{Z}_5, +)$ tiene 5 elementos, por lo tanto, de acuerdo al teorema de Lagrange, solo tiene subgrupos de orden 1 y de orden 5, es decir $\mathbf{H}_1 = \{0\}$ pues 0 es el neutro y $\mathbf{H} = \mathbb{Z}_5$.
- b.) Consideremos los subgrupos de (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) : Como este grupo tiene orden 6, cualquier subgrupo debe tener orden 1, 2, 3 o 6.

(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

- i.) Los subgrupos triviales son $\mathbf{H} = \{1\}$ y $\mathbf{H} = \mathbb{Z}_7^*$
- ii.) Subgrupos de orden 2: $\mathbf{H}_2 = \{1, 6\}$ pues 6 es inverso de sí mismo.
- iii.) Habría que analizar los subconjuntos de 3 elementos. Para aceptar un candidato como subgrupo primero nos fijamos en el orden (que debe dividir el orden de \mathbf{G}) y, de acuerdo al teorema, 7.4, la operación debe ser cerrada.

En $\mathbf{H}_{3a} = \{1, 2, 4\}$ la operación es cerrada, por tanto es subgrupo.

·	1	2	4
1	1	2	4
2	2	4	1
4	4	1	2

$H_{3b} = \{1, 3, 5\}$ no es subgrupo. Observemos su tabla de multiplicar

·	1	3	5
1	1	3	5
3	3	2	1
5	5	1	4

Ejemplo 7.13

Sea $A = \{a, b, c, m, n, o\}$. Si se sabe que $(A, *)$ es un grupo con tabla de “multiplicación” dada por

*	a	b	c	m	n	o
a	b	c	a	n	o	m
b	c	a	b	o	m	n
c	a	b	c	m	n	o
m	n	o	m	a	b	c
n	o	m	n	b	c	a
o	m	n	o	c	a	b

a.) Encuentre todos los subgrupos de A

b.) Calcule $(m^{-46} * o^4)^2 * (b * n^{-1})^{-1}$

Solución:

a.) Subgrupos de A . El neutro es $e = c$. El orden de A es 6. Por tanto tenemos que analizar los subconjuntos de orden 1, 2, 3 y 6

- i.) Subgrupos triviales $H = \{c\}$ y $H = A$
- ii.) Subgrupos de orden 2 : $H = \{c, n\}$ pues n es su propio inverso
- iii.) Subgrupos de orden 3 solo hay dos posibilidades

$H = \{c, a, b\}$. Su tabla es

*	c	a	b
c	c	a	b
a	a	b	c
b	b	c	a

$\therefore H = \{c, a, b\}$ es subgrupo de A

$$\mathbf{H} = \{c, m, o\}. \text{ Su tabla es } \begin{array}{c|ccc} * & c & m & o \\ \hline c & c & m & o \\ m & m & a & c \\ o & o & c & b \end{array} \quad \therefore \mathbf{H} = \{c, m, o\} \text{ no es subgrupo de } \mathbf{A}.$$

b.) Primero calculamos algunas potencias de m : $o^5 = m$ y $o^6 = c$ y $m^{-46} = (m^{-1})^{46} = o^{46}$.
Entonces

$$(m^{-46} * o^4)^2 * (b * n^{-1})^{-1} = (o^{50})^2 * (m)^{-1} = o^{101} = o^{6 \cdot 16 + 5} = o^6 * o^5 = m$$

Para obtener los subgrupos de (\mathbb{Z}_m, \cdot) , en particular cuando m es primo, podemos usar la teoría de grupos cíclicos para simplificar la labor.

7.3.1 (*) Grupos cíclicos

Definición 7.6

Consideremos el grupo "multiplicativo" $(\mathbf{G}, *)$. Si existe un $a \in \mathbf{G}$ de manera que

$$\mathbf{G} = \{a^n \text{ tal que } n \in \mathbb{Z}\}$$

entonces decimos que \mathbf{G} es cíclico y se escribe $\mathbf{G} = \langle a \rangle$

Teorema 7.6

Si $(\mathbf{G}, *)$ es cíclico y finito con $\text{Ord}(\mathbf{G}) = m$, entonces todos los subgrupos \mathbf{H} de \mathbf{G} son cíclicos
Si d_1, d_2, \dots, d_k son los divisores positivos de m , los subgrupos de \mathbf{G} son

$$\mathbf{H}_1 = \langle a^{d_1} \rangle, \quad \mathbf{H}_2 = \langle a^{d_2} \rangle, \quad \dots, \quad \mathbf{H}_k = \langle a^{d_k} \rangle$$

Ejemplo 7.14

Consideremos el grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$.

a.) $(\mathbb{Z}_{13}^*, \cdot)$ es un grupo cíclico y $\mathbb{Z}_{13}^* = \langle 2 \rangle$. En efecto,

$$\mathbb{Z}_{13}^* = \{2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}, 2^{11}, 2^{12}\} = \{2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7, 1\}$$

b.) Como $\text{Ord}(\mathbb{Z}_{13}^*) = 12$ entonces los subgrupos de \mathbb{Z}_{13}^* son

$$\begin{aligned}
 \langle 2^1 \rangle &= \mathbb{Z}_{13}^* \\
 \langle 2^2 \rangle &= \langle 4 \rangle = \{4, 3, 12, 9, 10, 1\} = \{1, 3, 4, 9, 10, 12\}, \\
 \langle 2^3 \rangle &= \langle 8 \rangle = \{8, 12, 5, 1\} = \{1, 5, 8, 12\}, \\
 \langle 2^4 \rangle &= \langle 3 \rangle = \{3, 9, 1\} = \{1, 3, 9\}, \\
 \langle 2^6 \rangle &= \langle 12 \rangle = \{12, 1\} = \{1, 12\}, \\
 \langle 2^{12} \rangle &= \langle 1 \rangle = \{1\}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 7.15

Consideremos el grupo multiplicativo (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) .

a.) (\mathbb{Z}_7^*, \cdot) es un grupo cíclico y $\mathbb{Z}_7^* = \langle 3 \rangle$. En efecto,

$$\mathbb{Z}_7^* = \{3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5, 3^6\} = \{3, 2, 6, 4, 5, 1\}$$

b.) Como $\text{Ord}(\mathbb{Z}_7^*) = 6$ entonces los subgrupos de \mathbb{Z}_6^* son

$$\begin{aligned}
 \langle 3^1 \rangle &= \mathbb{Z}_7^* \\
 \langle 3^2 \rangle &= \langle 9 \rangle = \{1, 2, 4\} \\
 \langle 3^3 \rangle &= \langle 27 \rangle = \{1, 6\} \\
 \langle 3^6 \rangle &= \langle 1 \rangle = \{1\}
 \end{aligned}$$

Ejercicios

7.3.1 Determine los subgrupos de $(\mathbb{Z}_5, +)$ y (\mathbb{Z}_5^*, \cdot) .

7.3.2 Consideremos $\mathbf{A} = \{a, b, c, d\}$ y la operación $*$, sobre \mathbf{A} , definida por medio de la tabla que sigue.

$*$	a	b	c	d
a	c	d	b	a
b	d	c	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

Si se sabe que grupo $(\mathbf{A}, *)$ es un grupo,

a.) Determine el elemento neutro

- b.) Determine el inverso de cada uno de los elementos de \mathbf{A}
- c.) Usando el teorema de Lagrange, determine todos los subgrupos de \mathbf{A} . Excepto para los subgrupos triviales, debe mostrar una subtabla de “multiplicar” para justificar que los subconjuntos cuyo orden dividen al orden de \mathbf{A} , son o no son grupos.

7.3.3 Consideremos $\mathbf{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y la operación $*$, sobre \mathbf{A} , definida por medio de la tabla que sigue.

*	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	1	6	4	5
3	3	1	1	5	6	4
4	4	6	5	1	3	2
5	5	4	6	2	1	3
6	6	5	4	3	2	1

Si se sabe que grupo $(\mathbf{A}, *)$ es un grupo,

- a.) Determine el elemento neutro
- b.) Determine el inverso de cada uno de los elementos de \mathbf{A}
- c.) Usando el teorema de Lagrange y el teorema 7.4, determine todos los subgrupos de \mathbf{A} . Excepto para los subgrupos triviales, debe mostrar una subtabla de “multiplicar” para justificar que los subconjuntos cuyo orden dividen al orden de \mathbf{A} , son o no son grupos.

7.3.4 En $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se define la operación \otimes de la manera siguiente:

$$\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, (a, b) \otimes (c, d) = (3ac, b + d + 5)$$

Si se define $\mathbf{H} = \{(x, 5k) \mid \text{tal que } x \in \mathbb{R}^*, k \in \mathbb{Z}\}$, y se sabe que $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$ es grupo, demuestre que $(\mathbf{H}, \otimes) \leq (\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$.

7.3.5 Si $\mathbf{H} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \text{tal que } x = \frac{5^k}{7^m}, \text{ con } k, m \in \mathbb{Z}\right\}$, pruebe que (\mathbf{H}, \cdot) es subgrupo de (\mathbb{R}^*, \cdot)

7.3.6 Sea $m \in \mathbb{Z}^+$, m fijo. Se define el conjunto $m\mathbb{Z}$ de la manera siguiente:

$$m\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{tal que } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ con } x = mk\}$$

Demuestre que $(m\mathbb{Z}, +)$ es subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.

7.3.7 Demuestre que $\mathbf{H} = \{x \in \mathbb{R}^* \mid \text{tal que } x = 3^m, m \in \mathbb{Z}\}$ es subgrupo de (\mathbb{R}^*, \cdot)

7.3.8 Verifique que si H_1 y H_2 son subgrupos de G , entonces $H_1 \cap H_2$ es subgrupo de G

7.3.9 $(\mathbb{Z}, +)$ es un grupo. \mathbb{N} es un subgrupo de \mathbb{Z} ?

7.3.10 (Centralizadores). Si $(G, *)$ es un grupo y si $a \in G$, verifique que

$$H(a) = \{a \in G \text{ tal que } xa = ax\}$$

es un subgrupo de G

7.3.11 Si $(G, *)$ es un grupo y si $a \in G$, donde a es un elemento fijo, verifique que

$$H = \{a^n \text{ tal que } n \in \mathbb{Z}\}$$

es un subgrupo de G

7.3.12 Si $(G, *)$ es un grupo abeliano, verifique que

$$H = \{x \in G \text{ tal que } x^2 = e\}$$

es un subgrupo de G

7.3.13 Si $(G, *)$ es un grupo abeliano, verifique que

$$H = \{x^2 \text{ tal que } x \in G\}$$

es un subgrupo de G

7.3.14 Dé un ejemplo de un grupo $(G, *)$ en el que la unión $H_1 \cup H_2$ de dos subgrupos H_1 y H_2 , no es subgrupo de G

7.3.15 Dé un ejemplo de un grupo $(G, *)$ con un subconjunto $A \neq \emptyset$ en el cual $*$ es cerrada, pero A no es subgrupo.

7.3.16 Sea $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$. Si “ \cdot ” representa la multiplicación usual de números reales:

- 1) Demuestre que (\mathbb{R}^*, \cdot) es un grupo abeliano.
- 2) Si $H = \{x \in \mathbb{R}^* \text{ tal que } x \geq 1\}$, determine si H es subgrupo de \mathbb{R}^* o no lo es.

7.3.17 (\mathbb{R}^*, \cdot) es un grupo. Verifique que (\mathbb{Q}^*, \cdot) es subgrupo de (\mathbb{R}^*, \cdot) .

7.3.18 Demuestre que $H = \{x \in \mathbb{R}^* \text{ tal que } x = 3^m, m \in \mathbb{Z}\}$ es subgrupo de (\mathbb{R}^*, \cdot)

Bibliography

- [1] Susanna S. Epp. *Discrete Mathematics with Applications*. Brooks/Cole Cengage Learning, 1995.
- [2] G. Haggard, J. Schlipf, S. Whitesides. *Discrete Mathematics for Computer Science*. Thomson, 2006.
- [3] K. Rosen. *Discrete Mathematics and Its Applications*. McGraw Hill. 2007
- [4] M. Murillo. *Introducción a la Matemática Discreta*. Cartago, Editorial Tecnológica de Costa Rica. 4ta. Edición
- [5] G. Sanabria B. "Apuntes de Relaciones Binarias". Folleto ITCR.
- [6] L. Marranghello M. "Principios de Matemática I". Folleto. UCR, 1983.
- [7] A. H. Clifford *The Algebraic Theory of Semigroup*. American Mathematical Society. 1961.
- [8] W. Mora F. *Introducción a la teoría de números. Ejemplos y Algoritmos*. ITCR. 2010. <http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/index.htm>
- [9] Gregory J. Chaitin. *The Unknowable (Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science)*. Springer. 1999 edition.
- [10] SAJW (<https://math.stackexchange.com/users/346682/sajw>), Propositional logic: subjective statements, URL (version: 2016-08-28): <https://math.stackexchange.com/q/1906126>

Solución de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

1.2. Tablas de verdad, tautologías, falacias y contingencias.

1.2.1

1) Tautología

P	$\neg P$	$\neg \neg P$	$P \equiv \neg \neg P$
V	F	V	V
F	V	F	V

2) Contingencia.

P	Q	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \equiv P$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V

3) Tautología

4) Contingencia

5) Contingencia

6) Contingencia

7) Contingencia

8) Contingencia.

P	Q	$(\neg P \wedge Q) \rightarrow (\neg Q \vee P)$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

9) Tautología.

P	Q	$\neg(P \rightarrow Q) \longleftrightarrow (P \wedge \neg Q)$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	V

10) Falacia.

P	Q	$(\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg(P \longleftrightarrow Q)$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	F

11) Contingencia.

P	Q	$(P \vee Q) \rightarrow [Q \rightarrow (P \wedge Q)]$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

1.2.2  

1) Tomemos $(\neg P \vee Q) \rightarrow R \equiv \Phi$, $(P \wedge \neg R) \rightarrow \neg Q \equiv \Psi$ y $\Phi \longleftrightarrow \Psi \equiv \Delta$; es decir, Δ es verdadero si tanto Φ como Ψ tienen los mismos valores de verdad

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	Φ	$\neg R$	$P \wedge \neg R$	$\neg Q$	Ψ	Δ
F	F	F	V	V	F	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V	F	F	V
V	V	V	F	V	V	F	F	F	V	V

Después de las dos primeras líneas es suficiente para concluir que se trata de una contingencia.

2) Tomemos $\neg(P \wedge Q) \vee R \equiv \Phi$, $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv \Psi$ y $\Phi \longleftrightarrow \Psi \equiv \Delta$; es decir, Δ es verdadero si tanto Φ como Ψ tienen los mismos valores de verdad.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	Φ	$Q \rightarrow R$	Ψ	Δ
F	F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	V	V	V	F	V	V	V	V

Dado que en todos los casos Δ es verdadero, entonces la expresión corresponde a una tautología.

3) Tomemos $(Q \wedge \neg P) \rightarrow R \equiv \Phi$, $\neg R \rightarrow (\neg Q \vee P) \equiv \Psi$ y $\Phi \longleftrightarrow \Psi \equiv \Delta$; es decir, Δ es verdadero si tanto Φ como Ψ tienen los mismos valores de verdad.

P	Q	R	$\neg P$	$Q \wedge \neg P$	Φ	$\neg R$	$\neg Q$	$\neg Q \vee P$	Ψ	Δ
F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	V	F	V	V	V
V	V	V	F	F	V	F	F	V	V	V

Se trata de una tautología.

4) Tomemos $(P \rightarrow Q) \rightarrow R \equiv \Phi$, $(P \wedge \neg R) \rightarrow \neg Q \equiv \Psi$ y $\Phi \longleftrightarrow \Psi \equiv \Delta$; es decir, Δ es verdadero si tanto Φ como Ψ tienen los mismos valores de verdad.

P	Q	R	$P \rightarrow Q$	Φ	$\neg R$	$P \wedge \neg R$	$\neg Q$	Ψ		Δ
F	F	F	V	F	V	F	V	V		F
F	F	V	V	V	F	F	V	V		V
F	V	F	V	F	V	F	F	V		F
F	V	V	V	V	F	F	F	V		V
V	F	F	F	V	V	V	V	V		V
V	F	V	F	V	F	F	V	V		V
V	V	F	V	F	V	V	F	F		V
V	V	V	V	V	F	F	F	V		V

Después de las dos primeras líneas es suficiente para concluir que se trata de una contingencia.

5) Tomemos $P \wedge (Q \rightarrow \neg R) \equiv \Phi$, $\neg Q \vee P \equiv \Psi$ y $\Phi \leftrightarrow \Psi \equiv \Delta$; es decir, Δ es verdadero si tanto Φ como Ψ tienen los mismos valores de verdad.

P	Q	R	$\neg R$	$Q \rightarrow \neg R$	Φ	$\neg Q$	Ψ		Δ
F	F	F	V	V	F	V	V		F
F	F	V	F	V	F	V	V		F
F	V	F	V	V	F	F	F		V
F	V	V	F	F	F	F	F		V
V	F	F	V	V	V	V	V		V
V	F	V	F	V	V	V	V		V
V	V	F	V	V	V	F	V		V
V	V	V	F	F	F	F	V		F

Después de las tres primeras líneas es suficiente para concluir que se trata de una contingencia.

1.2.3  

1) Primero: con una tabla de verdad verificamos que $((P \rightarrow Q) \wedge P) \equiv Q$ es una eventualidad, es decir, $((P \rightarrow Q) \wedge P) \not\equiv Q$

P	Q	$((P \rightarrow Q) \wedge P)$	$((P \rightarrow Q) \wedge P) \equiv Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F ←
F	F	F	V

En cambio, $((P \rightarrow Q) \wedge P)$ implica tautológicamente a Q , es decir, $((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$ es una tautología

P	Q	$((P \rightarrow Q) \wedge P)$	$((P \rightarrow Q) \wedge P) \rightarrow Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

2) Tomemos $[(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \equiv \Phi$, $\neg P \equiv \Psi$ y $\Phi \implies \Psi \equiv \Delta$; y mostremos que Δ es verdadero.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	Φ	Ψ	Δ
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Dado que en todos los casos Δ es verdadero, entonces la expresión corresponde a una implicación tautológica.

3) Tomemos $[(\neg P \vee Q) \wedge (\neg R \rightarrow P)] \equiv \Phi$, $Q \vee R \equiv \Psi$ y $\Phi \implies \Psi \equiv \Delta$; y mostremos que Δ es verdadero.

P	Q	R	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$\neg R$	$\neg R \rightarrow P$	Φ	Ψ	Δ
F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	V	F	V	V	V	V

Dado que en todos los casos Δ es verdadero, entonces la expresión corresponde a una implicación tautológica.


4) Tomemos $(P \rightarrow Q) \vee [(\neg Q \rightarrow \neg P) \wedge \neg R] \equiv \Phi$, $\neg(P \wedge \neg Q) \equiv \Psi$ y $\Phi \implies \Psi \equiv \Delta$; y mostremos que Δ es verdadero.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$	$(\neg Q \rightarrow \neg P)$	$\neg R$	$(\neg Q \rightarrow \neg P) \wedge \neg R$	Φ	$\neg P \wedge \neg Q$	Ψ	Δ
F	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V
V	V	V	F	F	V	V	V	V	F	V	V
V	V	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V


Dado que en todos los casos Δ es verdadero, entonces la expresión corresponde a una implicación tautológica.

5) Se omite.

1.3. Equivalencias lógicas y simplificación

1.3.1  • $[P \wedge (P \rightarrow Q)] \longleftrightarrow Q$ es falso si P es falso y Q es verdadera.

$$\overbrace{[\underbrace{F}_P \wedge (P \rightarrow Q)]}^F \longleftrightarrow \underbrace{V}_Q \text{ es falsa}$$

1.3.2  Se quiere demostrar que $(\neg P \vee Q) \wedge [(Q \vee T) \rightarrow R] \wedge [S \longleftrightarrow T] \rightarrow (P \rightarrow S)$ es una contradicción. Dado que se trata de un implicación, la única opción para que esta sea falsa es que se de el caso $V \rightarrow F$, así tenemos:

- $(P \rightarrow S)$ es falso, por lo que se concluye que P es V y que S es F .
- $(\neg P \vee Q) \wedge [(Q \vee T) \rightarrow R] \wedge [S \longleftrightarrow T]$ sea verdadera. Dado que son tres proposiciones unidas por conjunciones, cada una de ellas debe ser verdadera. Analizando cada una por separado tenemos:
 - Dado que S es F y $S \longleftrightarrow T$ debe ser verdadero, entonces se concluye que T debe ser F .
 - Dado que P es V entonces $\neg P$ es F , así para que $\neg P \vee Q$ sea verdadero se debe cumplir que Q sea V .
 - Dado que Q es V y T es F , entonces $(Q \vee T)$ es V , por lo que $(Q \vee T) \rightarrow R$ es verdadero si y sólo si R es V .

Por lo que en resumen: P es V , Q es V , R es V , S es F y T es F

1.3.3 

Como $(T \vee A) \wedge (M \wedge V) \longleftrightarrow F$ es falsa, pasa que $(T \vee A) \wedge (M \wedge V)$ es verdadera y como las proposiciones están unidas con una conjunción debe darse que cada una de ellas sea verdadera. Así

- Para que $T \vee A$ sea V , entonces T y A **no** pueden ser simultáneamente falsas.
- Para que $M \wedge V$ sea V , debe cumplirse que tanto M como V son V .

Con base a esta información analicemos el valor de verdad de la proposición $[(T \wedge F) \rightarrow \neg A] \wedge (E \rightarrow M)$. Dado que es una conjunción ambas proposiciones deben ser verdaderas, así:

- Como $T \wedge F$ es F , entonces sin importar el valor de A se cumple que $(T \wedge F) \rightarrow \neg A$ es V
- Dado que M es V , la proposición $E \rightarrow M$ es V

Por lo tanto el valor de verdad de la proposición es verdad.

1.3.4

Como $\neg(\neg P \vee H) \rightarrow (K \vee T)$ es falsa, debe pasar que $\neg(\neg P \vee H)$ es verdadera y $K \vee T$ es falsa. Analizando cada proposición por aparte tenemos:

- Para que $\neg(\neg P \vee H)$ sea verdadera, debe darse que $\neg P \vee H$ sea falsa; y como se trata de una disyunción, debe cumplirse que $\neg P$ es F (o sea P es V) y H es F .
- Para que $K \vee T$ sea falsa, y dado que se trata de una disyunción, debe cumplirse que tanto K como T sean F .

Si sustituimos dichos valores en la proposición buscada tenemos:

$$\begin{array}{ccc} (P \vee M) & \rightarrow & (K \wedge E) \\ (V \vee M) & \rightarrow & (F \wedge E) \\ V & \rightarrow & F \\ & & F \end{array}$$

1.3.5

Se quiere demostrar que $[(D \longleftrightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \vee A)] \rightarrow (C \rightarrow A)$ es una contradicción. Dado que se trata de un implicación, la única opción para que esta sea falsa es que se de el caso $V \rightarrow F$, así tenemos:

- $(C \rightarrow A)$ es falso, por lo que se concluye que C es V y que A es F .
- $(D \longleftrightarrow A) \wedge (A \rightarrow B) \wedge (B \vee A)$ sea verdadera. Dado que son tres proposiciones unidas por conjunciones, cada una de ellas debe ser verdadera. Analizando cada una por separado tenemos:
 - Dado que A es F y $D \longleftrightarrow A$ debe ser verdadero, entonces se concluye que D debe ser F .
 - Dado que A es F entonces para que $B \vee A$ sea verdadero se debe cumplir que B sea V . Dichos valores reafirman que $A \rightarrow B$.

Por lo que en resumen: A es F , B es V , C es V y D es F .

1.3.6

Si una equivalencia $A \longleftrightarrow B$ es falsa es porque A y B tiene distinto valor de verdad.

- $[P \wedge (P \rightarrow Q)] \longleftrightarrow Q$ es falsa entonces Q y $P \wedge (P \rightarrow Q)$ tienen valores de verdad distintos.
 - a.) Q no puede ser falsa porque $P \wedge (P \rightarrow Q)$ debería ser verdadera y por tanto P debería ser verdadera pero entonces $P \rightarrow Q$ sería falsa y $P \wedge (P \rightarrow Q)$ ya no sería verdadera.
 - b.) Q es verdadera y $P \wedge (P \rightarrow Q)$ es falsa, por lo tanto P debe ser falso (pues si P es verdadera, $P \rightarrow Q$ sería verdadera y $P \wedge (P \rightarrow Q)$ sería verdadera)
- Como $[(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)] \longleftrightarrow (Q \vee R)$ es falsa y Q es verdadera entonces $Q \vee R$ es verdadera y por tanto $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)$ es falsa y, como $P \rightarrow Q$ es verdadera, la única posibilidad es $\neg P \rightarrow R$ es falsa y como $\neg P$ es verdadera, entonces R es falsa

1.3.7   Se omite.

1.3.8   Se omite.

1.3.9   Se omite.

1.3.10  

- 1) $\neg p \vee q \vee r \equiv p \wedge \neg q \rightarrow r$
- 2) $\neg p \vee q \vee r \equiv p \wedge \neg r \rightarrow r$
- 3) $\neg p \vee q \vee r \equiv \neg(q \vee r) \rightarrow \neg p$
- 4) $s \vee [(\neg p \vee r) \wedge \neg t] \vee q \equiv (p \wedge \neg r) \vee t \rightarrow (s \vee q)$

1.3.11  

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1) $\equiv (\neg P \wedge Q) \vee [\neg(Q \wedge R) \wedge \neg P] \vee (P \wedge \neg R)$ | |
| $\equiv (\neg P \wedge Q) \vee [\neg P \wedge \neg(Q \wedge R)] \vee (P \wedge \neg R)$ | Con |
| $\equiv \{\neg P \wedge [Q \vee \neg(Q \wedge R)]\} \vee (P \wedge \neg R)$ | Dis |
| $\equiv \{\neg P \wedge [Q \vee (\neg Q \vee \neg R)]\} \vee (P \wedge \neg R)$ | DM |
| $\equiv [\neg P \wedge (\mathbf{V_0} \vee \neg R)] \vee (P \wedge \neg R)$ | Aso, Inv |
| $\equiv (\neg P \wedge \mathbf{V_0}) \vee (P \wedge \neg R)$ | Dom |
| $\equiv \neg P \vee (P \wedge \neg R)$ | Ne |
| $\equiv P \rightarrow (P \wedge \neg R)$ | ID |

bién puede simplificar a $P \rightarrow (P \wedge \neg R) \equiv \neg(P \wedge R)$

2)	$\equiv (Q \rightarrow P) \wedge \{[\neg(R \wedge \neg P) \wedge (Q \vee P)] \vee (R \wedge P)\}$	
	$\equiv (\neg Q \vee P) \wedge \{[(\neg R \vee P) \wedge (Q \vee P)] \vee (R \wedge P)\}$	ID, DM
	$\equiv (\neg Q \vee P) \wedge \{[P \vee (\neg R \wedge Q)] \vee (R \wedge P)\}$	Dis
	$\equiv (\neg Q \vee P) \wedge \{[P \vee (R \wedge P)] \vee (\neg R \wedge Q)\}$	Con, Aso, Con
	$\equiv (\neg Q \vee P) \wedge [P \vee (\neg R \wedge Q)]$	Abs
	$\equiv P \vee [\neg Q \wedge (\neg R \wedge Q)]$	Dis
	$\equiv P \vee [(\neg Q \wedge Q) \wedge \neg R]$	Con, Aso
	$\equiv P \vee (F_0 \wedge \neg R)$	Inv
	$\equiv P \vee F_0$	Dom
	$\equiv P$	Ne
3)	$\equiv [\neg P \vee (\neg Q \wedge P)] \vee [\neg Q \wedge (\neg P \rightarrow Q)]$	
	$\equiv [(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee P)] \vee [\neg Q \wedge (P \vee Q)]$	Dis, ID
	$\equiv [(\neg P \vee \neg Q) \wedge V_0] \vee [(\neg Q \wedge P) \vee (\neg Q \wedge Q)]$	Inv, Dis
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee [(\neg Q \wedge P) \vee F_0]$	Ne, Inv
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee (\neg Q \wedge P)$	Ne
	$\equiv [(\neg P \vee \neg Q) \vee \neg Q] \wedge [(\neg P \vee \neg Q) \vee P]$	Dis
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge [(P \vee \neg P) \vee \neg Q]$	Aso, Idem, Con, Aso
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge (V_0 \vee \neg Q)$	Inv
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge V_0$	Dom
	$\equiv \neg P \vee \neg Q$	Ne
4)	$\equiv \neg \{(Q \vee P) \wedge \neg [(\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)) \wedge (P \vee R)]\}$	
	$\equiv \neg(Q \vee P) \vee \neg \neg \{[\neg P \wedge (\neg Q \wedge R)] \wedge (P \vee R)\}$	DM
	$\equiv \neg(Q \vee P) \vee \{(\neg P \wedge \neg Q) \wedge [R \wedge (P \vee R)]\}$	DN, Aso, Aso
	$\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee \{(\neg P \wedge \neg Q) \wedge [R \wedge (P \vee R)]\}$	Con, DM
	$\equiv \neg P \wedge \neg Q$	Abs
5)	$\equiv [(\neg P \vee \neg Q) \wedge (\neg Q \rightarrow P)] \wedge \neg Q$	
	$\equiv [\neg Q \wedge (\neg P \vee \neg Q)] \wedge (Q \vee P)$	Con, Aso, ID
	$\equiv \neg Q \wedge (Q \vee P)$	Abs
	$\equiv (\neg Q \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$	Dis
	$\equiv F_0 \vee (\neg Q \wedge P)$	Inv
	$\equiv \neg Q \wedge P$	Ne

6)	$\equiv (P \rightarrow \neg Q) \wedge \{[\neg(R \vee \neg P) \wedge (Q \vee P)] \vee (R \wedge P)\}$	
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge \{[(\neg R \wedge \neg \neg P) \wedge (Q \vee P)] \vee (R \wedge P)\}$	ID, DM
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge \{[(\neg R \wedge P) \wedge (Q \vee P)] \vee (R \wedge P)\}$	DN
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge \{[(P \wedge (Q \vee P)) \wedge \neg R] \vee (R \wedge P)\}$	Aso, Con
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge [(P \wedge \neg R) \vee (R \wedge P)]$	Abs
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge [P \wedge (\neg R \vee R)]$	Dis
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \wedge \mathbf{V}_0)$	Inv
	$\equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge P$	Ne
	$\equiv (\neg P \wedge P) \vee (\neg Q \wedge P)$	Dis
	$\equiv \mathbf{F}_0 \vee (\neg Q \wedge P)$	Inv
	$\equiv \neg Q \wedge P$	Ne

1.3.12

- 1) Se omite.
- 2) Se omite.
- 3) Se omite.
- 4) Se omite.
- 5) Se omite.
- 6) Se omite.
- 7) Se omite.
- 8) Se omite.
- 9) Se omite.
- 10) Se omite.

1.4. Cuantificadores

1.4.1

- 1) Se omite.
- 2) Se omite.
- 3) Se omite.

1.4.2   El entero 7 es un contraejemplo.



1.4.3

a.) Falsa: Si $x = 1 \in \mathbb{Z}^+$ entonces $1 = y + 1 \implies y = 0 \notin \mathbb{Z}^+$

b.) Verdadera: Si $y \in \mathbb{R}^+$ entonces con $x = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+$ se tiene $xy = \frac{y}{2} < y$

El resto se omite.

1.4.4   Se omite.

1.4.5   $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$

1.4.6  

- 1) La proposición es verdadera, pues para cada $x \in \mathbb{R}^*$ siempre es posible encontrar un valor y de manera que $xy = 1$.
- 2) Verdadera, tome: $x = -2$ y $y = 3$
- 3) Verdadera, para ello debemos recordar la propiedad de **Densidad** en los números reales. tome $y = x + 1$
- 4) La proposición es falsa pues $0 \in \mathbb{R}$ y no existe un número real y tal que $0 \cdot y = 1$.
- 5) La proposición es verdadera pues basta tomar $y = 1$.
- 6) La proposición es verdadera, pues se puede tomar:

$$3x + 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1 - 3x}{2}$$

1.4.7  

Observe que $n = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$; así $A = \{\dots, -11, -8, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$ y $B = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, 13, \dots\}$, que son exactamente los mismos conjuntos. Así $A = B$ es una proposición verdadera.

1.4.8  

- 1) Se debe encontrar $x, y \in [0, 1]$ tales que $x + y < 1$. Basta tomar $x = y = 0$.
- 2) Dado que la propiedad se debe satisfacer para todo $x, y \in A$, observe que es falsa. Por ejemplo, si $x = y = 1$, entonces $x + y = 2$, y no existe $z \in A$ para el cual $2 < z$, ya que el máximo valor posible para z es 1.

1.5. Inferencias lógicas

1.5.1  

- 1) Usando distributividad y simplificación:

$$(Q \wedge P) \vee (R \wedge S) \equiv [(Q \wedge P) \vee R] \wedge [(Q \wedge P) \vee S] \quad \therefore (Q \wedge P) \vee R$$

Volvemos a usar distributividad y simplificación:

$$(Q \wedge P) \vee R \quad \therefore Q \vee R$$

- 2) Vamos a analizar primero lo que hay que demostrar: $\neg(T \wedge \neg Q) \equiv \neg T \vee Q$ (DM). Vemos que en las premisas dadas no hay ninguna T , por lo que debemos demostrar que $Q \equiv V$. Q solamente aparece en la primera premisa: $Q \vee \neg S$, por lo que para mostrar que $Q \equiv V$, utilizando silogismo disyuntivo deberíamos concluir que $\neg(\neg S) \equiv S$. Vemos además que no hay ninguna afirmación que no dependa de \vee o \rightarrow , que no permiten separar; pero tenemos dos premisas que comienzan una con P y la otra con $\neg P$: ese será nuestro punto de inicio.

- (1) $Q \vee \neg S$
- (2) $H \rightarrow S$
- (3) $P \rightarrow (R \wedge S)$
- (4) $\neg P \rightarrow H$
- (5) $\neg P \rightarrow S$ SH 2 y 4
- (6) $S \vee (R \wedge S)$ LC 3 y 5
- (7) S Abs. 6
- (8) Q SD 1 y 7
- (9) $Q \vee \neg T$ Adj. 8
- (10) $\neg (T \wedge \neg Q)$ DM y Conm. 9

3) En este caso hay que demostrar T , pero T solamente está en la cuarta premisa: $T \vee S$, así que debemos llegar a que $\neg S$ para poder utilizar SD. Aparte de la premisa 4, S solamente aparece en la premisa 3: $S \rightarrow R$, y para poder llegar a $\neg S$, utilizando la contrapositiva $\neg R \rightarrow \neg S$, es decir debemos llegar a $\neg R$.

- (1) $P \vee Q$
- (2) $\neg R \vee \neg P$
- (3) $S \rightarrow R$
- (4) $T \vee S$
- (5) $R \rightarrow \neg Q$
- (6) $Q \vee \neg R$ LC 1 y 2
- (7) $\neg R \vee \neg Q$ ID 5
- (8) $\neg R \vee \neg R$ LC 7 y 8
- (9) $\neg R$ Idem. 9
- (10) $\neg S$ MT 3 y 9
- (11) T SD 4 y 10

4) Comencemos con analizar lo que hay que demostrar: $\neg (\neg U \wedge T) \equiv U \vee \neg T$ (DM). No hay U en las premisas, por lo que debemos llegar a $\neg T$; es decir, la primera premisa se queda para el final.

- (1) $(R \vee Q) \rightarrow \neg T$
- (2) $\neg Q \vee R$
- (3) $P \vee Q$
- (4) $P \rightarrow (R \wedge S)$
- (5) $P \vee R$ LC 2 y 3
- (6) $\neg P \rightarrow R$ ID 5
- (7) $R \vee (R \wedge S)$ LC 4 y 6

- (8) R Abs. 7
 (9) $R \vee Q$ Adj. 8
 (10) $\neg T$ MP 1 y 9
 (11) $U \vee \neg T$ Adj. y Conm. 10
 (12) $\neg(\neg U \wedge T)$ DM 11

5) Observamos que no hay T en las premisas, así que analizamos un poco más lo que hay que demostrar: $T \rightarrow \neg A \equiv \neg T \vee \neg A$. Así, lo que hay que demostrar es $\neg A$; vemos que solamente la premisa 4 tiene A , por lo que tenemos que probar $\neg(\neg S) \equiv S$, y utilizar SD. Nos enfocamos entonces en las primeras 3 premisas:

- (1) $Q \rightarrow S$
 (2) $\neg P \rightarrow Q$
 (3) $P \rightarrow (R \wedge S)$
 (4) $\neg A \vee \neg S$
 (5) $\neg P \rightarrow S$ SH 1 y 2
 (6) $S \vee (R \wedge S)$ LC 3 y 5
 (7) S Abs. 6
 (8) $\neg A$ SD 4 y 7
 (9) $\neg T \vee \neg A$ Adj. 8
 (10) $T \rightarrow \neg A$ ID 9

- 6) (1) $P \vee \neg R$
 (2) $(\neg R \vee S) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
 (3) $(Q \vee T) \rightarrow (S \vee R)$
 (4) $\neg R$ Simp 1
 (5) $\neg R \rightarrow S$ Adi 5
 (6) $P \rightarrow Q$ MP 5 y 5
 (7) P Simp 1
 (8) Q MP 6 y 7
 (9) $Q \vee T$ Adi. 8
 (10) $S \vee R$ PM 3 y 9
 (11) S S.H 4 y 10
 (12) $\neg T \vee S$ Adi. 11
 (13) $T \rightarrow S$ I.D 12

7)	(1)	$\neg(P \wedge Q)$		(12)	$\neg P \vee \neg Q$	DM 1
	(2)	$\neg Q \rightarrow R$		(13)	$\neg P$	S.D 11 y 12
	(3)	$S \rightarrow \neg R$		(14)	$\neg P \vee T$	Adic 13
	(4)	$\neg S \rightarrow \neg(P \vee \neg Q)$		(15)	$P \rightarrow T$	I.D 14
	(5)	$\neg R \rightarrow Q$	contrap 2			
	(6)	$S \rightarrow Q$	S.H 3 y 5			
	(7)	$\neg Q \rightarrow \neg S$	contrap 6			
	(8)	$\neg Q \rightarrow \neg(P \vee \neg Q)$	SH 4 y 7			
	(9)	$Q \vee \neg(P \vee \neg Q)$	ID. 8			
	(10)	$Q \vee (\neg P \wedge Q)$	DM 9			
	(11)	Q	Absorc 10			

8) En este caso debemos demostrar $\neg U$, pero U solamente está en la quinta premisa, así que hay que aplicar un MT para llegar a $\neg U$. Así que debemos enfocarnos en obtener $\neg(\neg S \wedge \neg T) \equiv S \vee T$ (DM).

(1)	$(Q \wedge R) \rightarrow \neg P$	
(2)	$\neg Q \rightarrow S$	
(3)	$R \vee T$	
(4)	P	
(5)	$U \rightarrow (\neg S \wedge \neg T)$	
(6)	$\neg(Q \wedge R)$	MT 1 y 4
(7)	$\neg Q \vee \neg R$	DM 6
(8)	$\neg Q \vee T$	LC 3 y 7
(9)	$S \vee T$	LC 2 y 8
(10)	$\neg(\neg S \wedge \neg T)$	DM
(11)	$\neg U$	MT 5 y 10

9) Observamos que no hay M en las premisas, así que analizamos un poco más lo que hay que demostrar: $M \rightarrow N \equiv \neg M \vee N$. Por lo que basta llegar a demostrar N . Vemos que sólo la premisa cuatro tiene N por lo que debemos llegar a obtener $\neg \neg S \equiv S$ para poder aplicar SD. Así que nos centraremos en las tres primeras premisas:

- (1) $P \rightarrow S$
- (2) $(Q \vee R) \rightarrow P$
- (3) $Q \wedge T$
- (4) $\neg S \vee N$
- (5) $(Q \vee R) \rightarrow S$ SH 1 y 2
- (6) Q Simp. 3
- (7) $Q \vee R$ Adi. 6
- (8) S MP 5 y 7
- (9) $\neg \neg S$ DN 8
- (10) N SD 4 y 9
- (11) $\neg M \vee N$ Adi. 10

10) Observamos que no hay $\neg A$ en las premisas, así que analizamos un poco más lo que hay que demostrar: $\neg P \rightarrow \neg A \equiv P \vee \neg A$ (ID). Por lo que basta llegar a demostrar P . Vemos que sólo la primera premisa tiene P por lo que debemos llegar a obtenerla aplicando primero un MT y luego una Simplificación. Así que nos enfocaremos en las premisas 2, 3 y 4.

- (1) $(\neg P \vee Q) \rightarrow R$
- (2) $R \rightarrow (S \vee T)$
- (3) $\neg S \wedge \neg U$
- (4) $\neg U \rightarrow \neg T$
- (5) $\neg U$ Simp. 3
- (6) $\neg S$ Simp 3
- (7) $\neg T$ MP 4 y 5
- (8) $\neg S \wedge \neg T$ Adj. 6 y 7
- (9) $\neg (S \vee T)$ DM 8
- (10) $\neg R$ MT 2 y 9
- (11) $\neg (\neg P \vee Q)$ MT 1 y 10
- (12) $P \wedge \neg Q$ DM 11
- (13) P Simp. 12
- (14) $P \vee \neg A$ Adi. 13
- (15) $\neg P \rightarrow \neg A$ ID 14

1.5.2 Primera manera:

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow (s \wedge t) \equiv \neg(p \rightarrow q) \vee (s \wedge t)$ ID
2. $\neg(p \rightarrow q) \vee s$ Distributividad y simplificación en 1.
3. $\neg(s \vee u) \equiv \neg s \wedge \neg u \therefore \neg s$ DM y simplificación
4. $\neg(p \rightarrow q)$ Silogismo disyuntivo en 2. y 3.
5. $\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q \therefore p$ ID, DM y simplificación

Segunda manera:

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow (s \wedge t) \equiv \neg(p \rightarrow q) \vee (s \wedge t)$ ID
2. $\neg(s \vee u) \equiv \neg s \wedge \neg u \therefore \neg s$ DM y simplificación
3. $\neg s \therefore \neg s \vee \neg t \equiv \neg(s \wedge t)$ Adición y DM
4. $\neg(p \rightarrow q)$ Silogismo disyuntivo en 1. y 3.
5. $\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q) \equiv p \wedge \neg q \therefore p$ ID, DM y simplificación

1.5.3   Se omite.

1.5.4   Se omite.

1.5.5   Se omite.

1.5.6   Se omite.

1.5.7   Se omite.

1.5.8   Se omite.

1.5.9   Se omite.

1.5.10   Se omite.

1.5.11   Se omite.

1.5.12   Se omite.

1.5. (*) Inferencias lógicas con lenguaje natural.

1.5.13  

1)

P: $x > 6$.

Q: b sea positivo.

R: $2a - 3 = c$.

S: Problema tiene solución única.

T: Costa Rica es campeón mundial.

$$\boxed{1} \quad \neg(P \wedge Q),$$

$$\boxed{2} \quad \neg Q \rightarrow R,$$

$$\boxed{3} \quad S \rightarrow \neg R,$$

$$\boxed{4} \quad \neg S \rightarrow \neg(P \vee \neg Q)$$

$$\therefore \neg P \vee T$$

- (1) $\neg (P \wedge Q)$
 (2) $\neg Q \rightarrow R$
 (3) $S \rightarrow \neg R$
 (4) $\neg S \rightarrow \neg (P \vee \neg Q)$
 (5) $\neg S \vee \neg R$ ID 3
 (6) $\neg R \rightarrow Q$ Contrapositiva, DN 2
 (7) $Q \vee \neg (P \vee \neg Q)$ DC 4,5,6
 (8) $Q \vee (\neg P \wedge Q)$ DM, DN 7
 (9) Q Abs. 8
 (10) $\neg P \vee \neg Q$ DM 1
 (11) $\neg P$ SD 9 y 10
 (12) $\neg P \vee T$ Adi. 11

2)

P: $a + b = 7$.

$$\boxed{1} \quad \neg (P \wedge Q),$$

Q: $b > 0$.

$$\boxed{2} \quad \neg P \rightarrow R,$$

R: $a + b < 7$.

$$\boxed{3} \quad \neg Q \rightarrow R,$$

S: El problema tiene solución.

$$\boxed{4} \quad S \rightarrow \neg R;$$

T: 3211 es divisible por 3.

$$\boxed{5} \quad \neg S \rightarrow \neg (P \vee \neg Q)$$

$$\therefore \neg P \vee T$$

- | | | |
|-----------------------------------------------|-------------------------------------------|-----------|
| (1) $\neg (P \wedge Q)$ | (10) $P \rightarrow \neg S$ | SH 7 y 9 |
| (2) $\neg P \rightarrow R$ | (11) $P \rightarrow \neg (P \vee \neg Q)$ | SH 5 y 10 |
| (3) $\neg Q \rightarrow R$ | (12) $P \rightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ | DM 11 |
| (4) $S \rightarrow \neg R$ | (13) $\neg P \vee (\neg P \vee \neg Q)$ | ID 12 |
| (5) $\neg S \rightarrow \neg (P \vee \neg Q)$ | (14) $\neg P$ | Abs 13 |
| (6) $\neg P \vee \neg Q$ DM 1 | (15) $\neg P \vee T$ | Adic 14 |
| (7) $P \rightarrow \neg Q$ ID 6 | | |
| (8) $P \rightarrow R$ SH 3 y 7 | | |
| (9) $R \rightarrow \neg S$ ID 5 | | |

3)

P: Luis va al partido de fútbol.

$$\boxed{1} P \rightarrow Q,$$

Q: Laura irá a nadar.

$$\boxed{2} R \rightarrow S,$$

R: Manuel ve televisión toda la noche.

$$\boxed{3} (Q \vee R) \rightarrow T,$$

S: Carolina irá a nadar.

$$\boxed{4} \neg T$$

T: Jorge acompañara a Laura o Carolina.

$$\therefore \neg (P \vee R)$$

Es claro que debemos comenzar utilizando la afirmación de que $\neg T$. Por otro lado, lo que se debe demostrar es $\neg (P \vee R) \equiv \neg P \wedge \neg R$ (DM).

$$(1) P \rightarrow Q$$

$$(2) R \rightarrow S$$

$$(3) (Q \vee R) \rightarrow T$$

$$(4) \neg T$$

$$(5) \neg (Q \vee R) \quad \text{MT 3 y 4}$$

$$(6) \neg Q \wedge \neg R \quad \text{DM 5}$$

$$(7) \neg Q \quad \text{Simp. 6}$$

$$(8) \neg P \quad \text{MT 1 y 7}$$

$$(9) \neg R \quad \text{Simp. 6}$$

$$(10) \neg P \wedge \neg R \quad \text{Adi. 8 y 9}$$

$$(11) \neg (P \vee R) \quad \text{DM 10}$$

4)

P: José gana la carrera.

$$\boxed{1} P \rightarrow (Q \vee R),$$

Q: Pedro fue el segundo.

$$\boxed{2} Q \rightarrow \neg P,$$

R: Ramón fue el segundo.

$$\boxed{3} S \rightarrow \neg R,$$

S: Carlos fue el segundo.

$$\boxed{4} P$$

$$\therefore \neg S$$

- (1) $P \rightarrow (Q \vee R)$
 (2) $Q \rightarrow \neg P$
 (3) $S \rightarrow \neg R$
 (4) P
 (5) $Q \vee R$ MP 1 y 4
 (6) $\neg Q$ MT 2 y 4
 (7) R SD 5 y 6
 (8) $\neg S$ MT 3 y 7

5)

P: Juan le apostó a la Liga.

$$\boxed{1} P \rightarrow Q,$$

Q: Juan gastó el dinero.

$$\boxed{2} Q \rightarrow (R \wedge S),$$

R: No alcanza para comida.

$$\boxed{3} R \rightarrow (\neg T \vee U),$$

S: La esposa pide que trabaje más.

$$\boxed{4} P$$

T: Los niños comen.

$$\therefore T \rightarrow U$$

U: La esposa de Juan está enojada.

Como $T \rightarrow U \equiv \neg T \vee U$ (ID), entonces lo que hay que hacer es demostrar R .

- | | | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(1) $P \rightarrow Q$</p> <p>(2) $Q \rightarrow (R \wedge S)$</p> <p>(3) $R \rightarrow (\neg T \vee U)$</p> <p>(4) P</p> <p>(5) Q MP 1 y 4</p> | | <p>(6) $R \wedge S$ MP 2 y 5</p> <p>(7) R Simp. 6</p> <p>(8) $\neg T \vee U$ MP 3 y 7</p> <p>(9) $T \rightarrow U$ ID 8</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

6)

P: Aplico para la beca a España.

$$\boxed{1} P \rightarrow \neg Q,$$

Q: Matriculo el curso de verano.

$$\boxed{2} Q \vee R,$$

R: Me voy de vacaciones.

$$\boxed{3} \neg R,$$

S: Compro un piano.

$$\boxed{4} (Q \wedge S) \rightarrow P$$

$$\therefore \neg S$$

- (1) $P \rightarrow \neg Q$
- (2) $Q \vee R$
- (3) $\neg R$
- (4) $(Q \wedge S) \rightarrow P$
- (5) Q SD 2 y 3
- (6) $\neg P$ MT 1 y 5
- (7) $\neg(Q \wedge S)$ MT 4 y 6
- (8) $\neg Q \vee \neg S$ DM 7
- (9) $\neg S$ SD 5 y 8

7)

P: Gadafi renuncia.

Q: El precio del petróleo aumenta.

R: Se bombardea Trípoli.

S: Se restituye la paz.

T: Hay problemas políticos en Libia.

$$\boxed{1} (P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg R \wedge S),$$

$$\boxed{2} \neg R \rightarrow \neg T,$$

$$\boxed{3} T$$

$$\therefore Q$$

- (1) $(P \vee \neg Q) \rightarrow (\neg R \wedge S)$
- (2) $\neg R \rightarrow \neg T$
- (3) T
- (4) $R \vee \neg T$ ID 2
- (5) R SD 3 y 4
- (6) $R \vee \neg S$ Adic 5
- (7) $\neg(\neg R \wedge S)$ DM 7
- (8) $\neg(P \vee \neg Q)$ MT 1 y 7
- (9) $\neg P \wedge Q$ DM 8
- (10) Q Simp 9

8)

P: Se aprueba el convenio con la UE.

Q: Se disminuyen los aranceles.

R: La economía empeorará.

S: La inflación se mantendrá.

T: El desempleo aumenta.

$$\boxed{1} (\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S),$$

$$\boxed{2} R \rightarrow T,$$

$$\boxed{3} \neg T$$

$$\therefore P$$

- (1) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S)$
 (2) $R \rightarrow T$
 (3) $\neg T$
 (4) $\neg R$ MT 2 y 3
 (5) $\neg R \vee \neg S$ Adic 4
 (6) $\neg (R \wedge S)$ DM 5
 (7) $\neg (\neg P \wedge \neg Q)$ MT 1 y 6
 (8) $P \wedge Q$ DM 7
 (9) P Simp 8

9)

P: Voy a la montaña.

Q: Iré a caminar.

R: Montaré a caballo.

S: Leeré un libro.

T: Me duele la espalda.

$$\boxed{1} P \rightarrow (Q \wedge R),$$

$$\boxed{2} \neg P \rightarrow S,$$

$$\boxed{3} T \rightarrow \neg R,$$

$$\boxed{4} \neg T \wedge \neg R$$

 $\therefore S$

- (1) $P \rightarrow (Q \wedge R)$
 (2) $\neg P \rightarrow S$
 (3) $T \rightarrow \neg R$
 (4) $\neg T \wedge \neg R$
 (5) $\neg R$ Simp 4
 (6) $\neg R \vee \neg Q$ Adic 5
 (7) $\neg (R \wedge Q)$ DM 6
 (8) $\neg P$ MT 1 y 7
 (9) S MP 2 y 8

10)

P: Costa Rica clasifica al mundial.

Q: Jamaica clasifica al mundial.

R: Honduras clasifica al mundial.

S: México clasifica al mundial.

$$\boxed{1} P \vee Q,$$

$$\boxed{2} (\neg R \vee Q) \rightarrow S,$$

$$\boxed{3} \neg S$$

 $\therefore P \wedge R$

- (1) $P \vee Q$
- (2) $(\neg R \vee Q) \rightarrow S$
- (3) $\neg S$
- (4) $\neg(\neg R \vee Q)$ MT 2 y 3
- (5) $R \wedge \neg Q$ DM 4
- (6) R Simp. 5
- (7) $\neg Q$ Simp. 5
- (8) P SD 1 y 7
- (9) $P \wedge R$ Adj. 6 y 8

11)

P: Pedro está involucrado en el robo.

Q: Carlos está involucrado en el robo.

R: Julia está involucrado en el robo.

$$\boxed{1} \quad P \rightarrow (Q \wedge \neg R),$$

$$\boxed{2} \quad (P \vee Q) \rightarrow R,$$

$$\boxed{3} \quad P$$

$$\therefore \neg Q \wedge \neg R$$

- (1) $P \rightarrow (Q \wedge \neg R)$
- (2) $(P \vee Q) \rightarrow R$
- (3) P
- (4) $Q \wedge \neg R$ MP 1 y 3
- (5) $\neg R$ Simp. 4
- (6) $\neg(P \vee Q)$ MT 2 y 5
- (7) $\neg P \wedge \neg Q$ DM 6
- (8) $\neg Q$ Simp. 7
- (9) $\neg Q \wedge \neg R$ Adj. 5 y 8

Soluciones del Capítulo 2

2.1. Operaciones con conjuntos y cuantificadores

2.1.1

- 1) La proposición es verdadera. En efecto,

Para $y = 0$ tome $x = 0 \in B$, pues $0 = 3 \cdot 0$.

Para $y = 3$ tome $x = 1 \in B$, pues $3 = 3 \cdot 1$.

Para $y = 6$ tome $x = 2 \in B$, pues $6 = 3 \cdot 2$.

Para $y = 9$ tome $x = 3 \in B$, pues $9 = 3 \cdot 3$.

2) La proposición es verdadera. En efecto, tome $x = 3 \in B$

Para $y = 0$, $\frac{0}{3} = 0 \in B$

Para $y = 3$, $\frac{3}{3} = 1 \in B$

Para $y = 6$, $\frac{6}{3} = 2 \in B$

Para $y = 9$, $\frac{9}{3} = 3 \in B$

2.1.2

1) Note que $B \cap C = \{5\}$, por lo que $x = 5$ así $x + 2 = 7$ donde $7 \in A$. Por lo tanto la afirmación es cierta.

2) Dado que $x \in A$ tenemos tres posibles valores para x :

- $x = 1$: Basta tomar $y = 5$ para que se cumpla que $xy = 1 \cdot 5 = 5 \in C$.
- $x = 3$: Basta tomar $y = 4$ para que se cumpla que $xy = 3 \cdot 4 = 12 \in C$.
- $x = 7$: Basta tomar $y = 2$ para que se cumpla que $xy = 7 \cdot 2 = 14 \in C$.

Por lo tanto la afirmación es cierta.

3) La afirmación es falsa, pues se tienen los siguientes contraejemplos:

- $x = 1$: Basta con ver que si $y = 2$ entonces $x + y = 3 \notin C$.
- $x = 3$: Basta con ver que si $y = 4$ entonces $x + y = 7 \notin C$.
- $x = 7$: Basta con ver que si $y = 2$ entonces $x + y = 9 \notin C$.

2.1.3

1) Dado que se trata de una conjunción analicemos cada proposición por separado.

- $\forall x \in \mathbb{N}[x \in A \implies x < 9]$: es cierta pues basta con observar los valores de los elementos de A .
- $\exists x \in \mathbb{N}[x \notin A \wedge P(2x)]$: es cierta pues basta tomar $x = 8$, claramente $8 \notin A$ y $P(2 \cdot 8) = 17$ es un número primo.

Por lo tanto la proposición es verdadera.

2) Note que $P(2x - 1) = 2x - 1 + 1 = 2x$ y el único valor de x para que $2x$ sea primo es $x = 1$ y como $1 \notin A$ entonces se concluye que la proposición es falsa.

3) Para que la proposición sea verdadera, basta con que al menos $Q(x)$ ó $P(x)$ sean verdaderas. Dado que $Q(x)$ es siempre falsa, analicemos la proposición $P(x)$ con todos los posibles valores de x :

- $x = 2$: Basta con tomar $y = 2$ para que $P(x + y)$ sea un número primo.
- $x = 3$: Basta con tomar $y = 1$ para que $P(x + y)$ sea un número primo.
- $x = 4$: Basta con tomar $y = 2$ para que $P(x + y)$ sea un número primo.
- $x = 5$: Basta con tomar $y = 1$ para que $P(x + y)$ sea un número primo.
- $x = 6$: Basta con tomar $y = 4$ para que $P(x + y)$ sea un número primo.
- $x = 7$: Basta con tomar $y = 3$ para que $P(x + y)$ sea un número primo.

Por lo tanto la proposición es verdadera.

2.1.4

- 1) La proposición es verdadera, pues basta con tomar $x = \{1\} \in C$ y claramente $\{1\} \subset A$.
- 2) La proposición es falsa, pues para $x = 3 \in A$ no se cumple $\{3\} \in C$.
- 3) e tiene que

$$\begin{aligned}
 & \neg \forall x [x \in B \implies x = \emptyset] \\
 \equiv & \exists x \neg [\neg (x \in B) \vee (x = \emptyset)] && \text{Prop. y ID} \\
 \equiv & \exists x [x \in B \wedge \neg (x = \emptyset)] && \text{DM, DN} \\
 \equiv & \exists x [x \in B \wedge x \neq \emptyset] && \text{DM, DN}
 \end{aligned}$$

Dicha proposición es falsa, pues el único elemento que pertenece a B es \emptyset .

2.1.5

1) La proposición es verdadera, pues basta tomar $x = 4$, así se tiene $\frac{y}{4-3} = y$ y se tenía que $y \in A$.

2) La proposición es falsa, pues al ser una conjunción ambas proposiciones deben ser verdaderas. Y como $A = \{1, 2, 3, 4\}$, claramente:

- $P(y)$ es falsa para $y = 2$ y $y = 4$
- $Q(y)$ es falsa para $y = 1$ pues $Q(1) = 4$ y $y = 3$ pues $Q(1) = 10$

2.1.6

1) Es verdadero. Se pueden analizar dos casos:

1) Si $0 < x < 1$, entonces basta tomar $y = x$, así $0 < x \cdot y < 1$ por lo que $x \cdot y \in B$.

2) Si $x \geq 1$, entonces se puede tomar $y = \frac{1}{2x}$, que satisface $0 < \frac{1}{2x} < 1$, por lo que $y \in B$. Luego $x \cdot y = \frac{1}{2} \in B$. Así para cualquier elemento que se escoja en A , es posible encontrar al menos un elemento en B que satisfaga que el producto de ambos pertenece a B .

2) Como lo que debemos es encontrar un x que satisfaga la ecuación para cualquier valor de y , entonces vamos a tratar de despejar x a ver que pasa:

$$\begin{aligned} xy + 2x &= 2y + 4 \\ \implies x(y + 2) &= 2(y + 2) \\ \implies x &= 2 \quad (\text{dado que con seguridad } y \neq -2) \end{aligned}$$

Por lo tanto la afirmación es verdadera, basta tomar $x = 2$ y la ecuación $2y + 4 = 2y + 4$ es verdadera para todo valor de y .

3) Observe que es igual al caso (a), pues se tenía que $0 < xy < 1$. Si nos quedamos tan solo con la parte de la derecha de la inecuación se tiene que $xy < 1 \implies x < \frac{1}{y}$. Por lo tanto la afirmación es verdadera, ya que los valores de y se pueden tomar como en el caso (a).

2.1.7

1) Observe que los elementos de C son los conjuntos $\{6\}$, $\{3, 4, 7\}$ y $\{3, 7\}$, y que cada uno de ellos es un subconjunto de A , por lo tanto la afirmación es verdadera.

2)

Dado que $2^B = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, los elementos de 2^B son \emptyset y $\{\emptyset\}$. \emptyset es un elemento de B , pero $\{\emptyset\}$ no, por lo tanto la afirmación es falsa.

3) Lo podemos resolver de dos maneras. Una es quitando la negación, y analizar entonces la afirmación: $\forall x[x \in A \implies \{x\} \notin C]$, la cual es falsa, porque $6 \in A$ y $\{6\} \in C$. Así, la afirmación original es verdadera.

Otra posibilidad es aplicar la negación. Debemos recordar que $x \in A \implies \{x\} \notin C \equiv \neg(x \in A) \vee \{x\} \notin C \equiv x \notin A \vee \{x\} \notin C$. Así, $\neg \forall x[x \in A \implies \{x\} \notin C] \equiv \exists x[x \in A \wedge \{x\} \in C]$. La respuesta es verdadera, ya que $6 \in A$ y $\{6\} \in C$.

2.1.8

$$A \Delta B = \{1, \{a, 1\}, \{\{a\}, 1\}, \{\{a, 1\}, a\}\} \quad (\text{o basta con } A \cap B = \{a, \{a\}\})$$

1) Para $a \in A$, $y = 1 \in A \Delta B$ y $\{a, 1\} \in A \cup B$

2) Para $\{a\} \in A$, $y = 1 \in A \Delta B$ y $\{\{a\}, 1\} \in A \cup B$

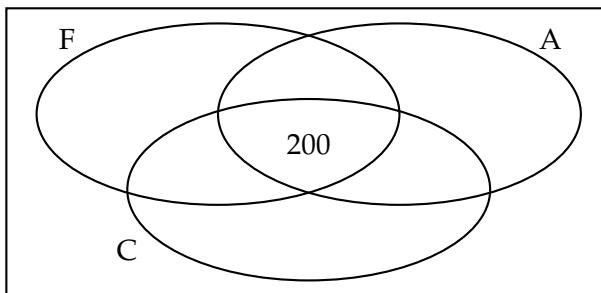
3) Para $\{a, 1\} \in A$, la única opción es $\{\{a, 1\}, a\} \in A \cup B$ pero $a \notin A \Delta B$

\therefore La proposición es falsa

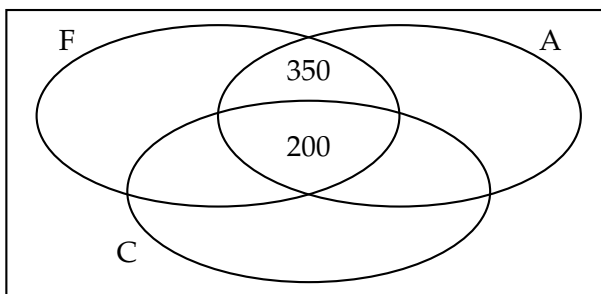
2.1.9   Se omite.

2.1.10   Tenemos:

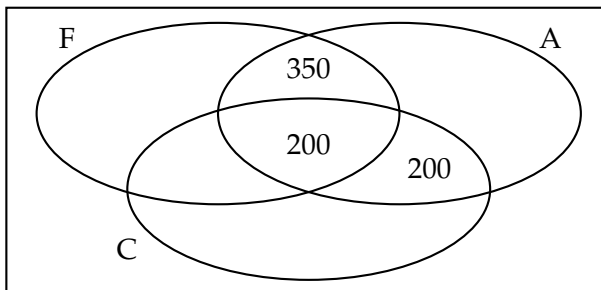
- 200 estudiantes practican fútbol, atletismo y ciclismo;



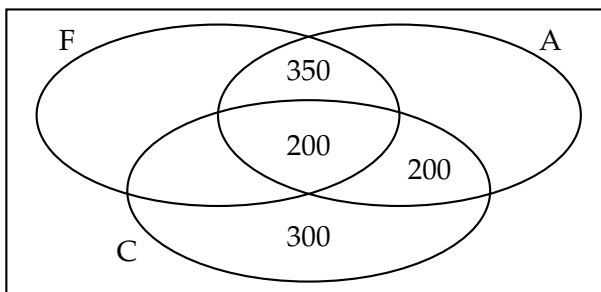
- 550 estudiantes practican fútbol y atletismo;



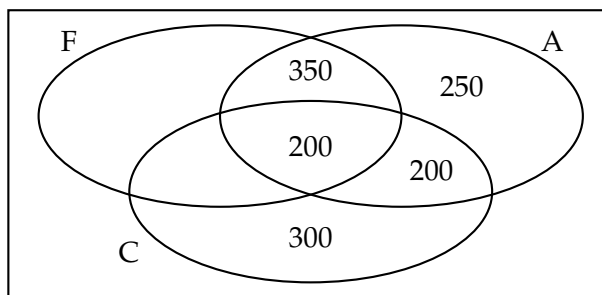
- 400 estudiantes practican atletismo y ciclismo;



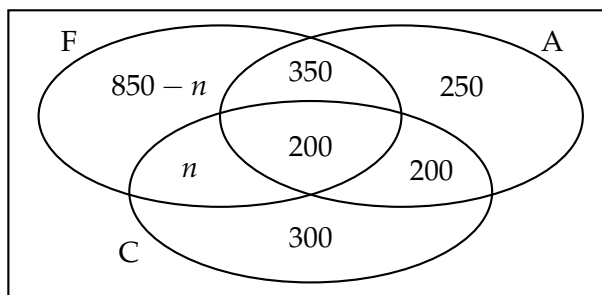
- 300 estudiantes practican únicamente ciclismo;



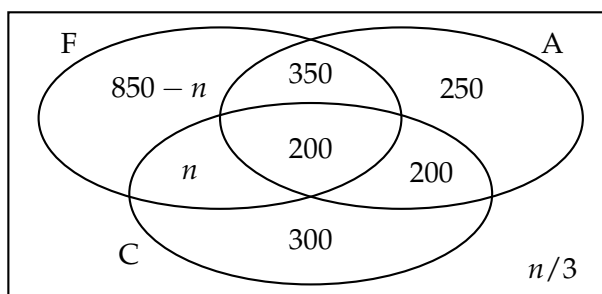
- 1000 estudiantes practican atletismo;



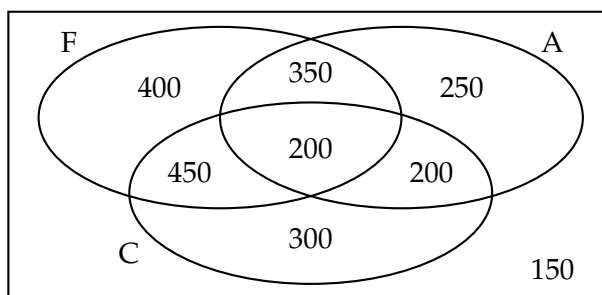
- y 1400 estudiantes practican fútbol;



- Además, se sabe que los que no practican ningún deporte son una tercera parte de los que únicamente practican fútbol y ciclismo.



- Finalmente, $(850 - n) + n + 350 + 200 + 250 + 200 + 300 + n/3 = 2300$, de donde $n = 450$.



Así, 400 estudiantes practican únicamente fútbol y 1150 estudiantes practican ciclismo.

2.1. Operaciones con conjuntos

2.1.11 Se omite.

2.1.12

1) Tenemos:

- $A \triangle B = \{1, 2, 6\}$,

- $\overline{A\Delta B} = \{3, 4, 5, 7\}$,

Por lo tanto, $\overline{A\Delta B} \cap C = \{5, 7\}$.

2) Tenemos

- $A \cap B = \{3, 5\}$,
- $B - C = \{2, 3\}$,
- $\mathcal{P}(B - C) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$,

Por lo tanto,

$$(A \cap B) \times (\mathcal{P}(B - C)) = \{(3, \emptyset), (3, \{2\}), (3, \{3\}), (3, \{2, 3\}), (5, \emptyset), (5, \{2\}), (5, \{3\}), (5, \{2, 3\})\}$$

2.1.13   Tenemos:

- $A\Delta B = \{2, 5\}$,
- $(A\Delta B) \times C = \{(2, 3), (2, 4), (2, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)\}$,
- $B \cap C = \{3, 5\}$,
- $A \times (B \cap C) = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}$,

Por lo tanto, $[(A\Delta B) \times C] \cap [A \times (B \cap C)] = \{(2, 3), (2, 5)\}$

2.1.14  

1) Tenemos

- $A \cup C = \{a, b, d\}$,

Por lo tanto, $(A \cup C)\Delta B = \{a, c\}$.

2) Tenemos:

- $\overline{A} = \{c, d, e, f\}$,
- $\overline{B} = \{a, e, f\}$,
- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{e, f\}$,

Por lo tanto, $\mathcal{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = \{\emptyset, \{e\}, \{f\}, \{e, f\}\}$

3) Tenemos:

- $C \times B = \{(a, b), (a, c), (a, d), (d, b), (d, c), (d, d)\}$,
- $(A \times C) = \{(a, a), (a, d), (b, a), (b, d)\}$.

Por lo tanto, $(C \times B) - (A \times C) = \{(a, b), (a, c), (d, b), (d, c), (d, d)\}$.

2.1.15

1) Tenemos:

- $B - A = \{d, e, f\}$,
- $\overline{B - A} = \{a, b, c\}$,

Por lo tanto, $C - \overline{B - A} = \{d, f\}$.

2) Tenemos:

- $A \Delta B = \{a, c, d, e, f\}$,
- $(A \Delta B) \cup C = \{a, c, d, e, f\}$,

Por lo tanto, $\overline{(A \Delta B) \cup C} = \{b\}$.

2.1.16

1) Tenemos:

- $B \cup C = \{b, c, d, e, f\}$,
- $A - (B \cup C) = \{a, g\}$,
- $A \Delta C = \{a, g\}$,
- $\overline{A \Delta C} = \{b, c, d, e, f\}$,

Por lo tanto, $[A - (B \cup C)] \cap \overline{A \Delta C} = \emptyset$.

2) Tenemos:

- $C - B = \{d\}$,
- $\mathcal{P}(C - B) = \{\emptyset, \{d\}\}$,
- $A \cup C = \{a, c, d, e, g\}$,
- $\overline{A \cup C} = \{b, f\}$,

Por lo tanto, $\mathcal{P}(C - B) \times \overline{A \cup C} = \{(\emptyset, b), (\emptyset, f), (\{d\}, b), (\{d\}, f)\}$.

3) Tenemos:

- $C - A = \emptyset$,
- $\mathcal{P}(C - A) = \{\emptyset\}$,

Por lo tanto, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(C - A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2.1.17

1) Tenemos:

- $A \Delta C = \{d, f\}$,
- $B - A = \{d, e\}$,
- $\overline{B - A} = \{a, b, c, f, g\}$,

Por lo tanto, $(A \Delta C) \cap \overline{B - A} = \{f\}$.

2) Tenemos:

- $C - B = \{a, f\}$,
- $\mathcal{P}(C - B) = \{\emptyset, \{a\}, \{f\}, \{a, f\}\}$,
- $A \cap B = \{b, g\}$,

Por lo tanto, $\mathcal{P}(C - B) \times (A \cap B) = \{(\emptyset, b), (\emptyset, g), (\{a\}, b), (\{a\}, g), (\{f\}, b), (\{f\}, g), (\{a, f\}, b), (\{a, f\}, g)\}$.

2.1.18

1) Tenemos:

- $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$,
- $\overline{A \cup B} = \{f, g\}$,
- $\overline{A} = \{b, c, f, g\}$,
- $\overline{A} \cap B = \{b, c\}$,

Por lo tanto, $\overline{(A \cup B)} \times (\overline{A} \cap B) = \{(f, b), (f, c), (g, b), (g, c)\}$.

2) Tenemos:

- $\overline{B} = \{a, e, f, g\}$,
- $A \cap \overline{B} = \{a, e\}$,

Por lo tanto, $\mathcal{P}(A \cap \overline{B}) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{a, e\}\}$.

2.1.19 Tenemos:

- $A \times B = \{(w, 5), (w, 2)\}$,

Por lo tanto, $\mathcal{P}(A \times B) = \{\emptyset, \{(w, 5)\}, \{(w, 2)\}, \{(w, 5), (w, 2)\}\}$.

2.1.20

1) Tenemos:

- $A - B = \{1, \{1, 2\}\}$,
- $A \Delta B = \{1, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$,

Por lo tanto, $(A - B) \cup (A \Delta B) = \{1, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.

2) Tenemos:

- $A \cap B = \{\emptyset, \{1\}, 2\}$,
- $A \cup B = \{\emptyset, 1, \{1\}, 2, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}\}$,
- $\overline{A \cup B} = \{3, \{2\}\}$,

Por lo tanto, $(A \cap B) \times \overline{A \cup B} = \{(\emptyset, 3), (\emptyset, \{2\}), (\{1\}, 3), (\{1\}, \{2\}), (2, 3), (2, \{2\})\}$.

3) Tenemos:

- $\overline{A \cap B} = \{3, \{2\}\}$,

Por lo tanto, $\mathcal{P}(\overline{A \cap B}) = \{\emptyset, \{3\}, 2, \{2\}\}$.

4) Hay muchas posibilidades, por ejemplo $\{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{1\})\}$

2.1.21

1) $A \cap B = \{2\}$

2) $\mathcal{P}(A - B) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{1\}, \{3\}, \{\{\emptyset\}, 1\}, \{\{\emptyset\}, \{3\}\}, \{1, \{3\}\}, \{\{\emptyset\}, 1, \{3\}\}\}$

3) $B \times A = \{(3, \{\emptyset\}), (3, 1), (3, \{2\}), (3, \{3\}), (\{2\}, \{\emptyset\}), (\{2\}, 1), (\{2\}, \{2\}), (\{2\}, \{3\})\}$

4) $A \Delta B = \{\{\emptyset\}, 1, 3, \{3\}\}$

2.1.22

1) Tenemos:

- $B - A = \{\{1\}, \{3\}\}$,
- $A \cap B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\}$,

Por lo tanto, $(B - A) \times (A \cap B) = \{(\{1\}, \emptyset), (\{1\}, \{\emptyset\}), (\{1\}, 2), (\{3\}, \emptyset), (\{3\}, \{\emptyset\}), (\{3\}, 2)\}$.

2) Tenemos:

- $\overline{B} = \{1, 3, \{2\}, \{1, 2\}\}$,
- $A - \overline{B} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\}$,

Por lo tanto, $\mathcal{P}(A - \overline{B}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{2\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, 2\}, \{\{\emptyset\}, 2\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, 2\}\}$.

2.1.23

1) Tenemos:

- $A = \{\emptyset, \{3\}\}$,
- $B = \{\emptyset, 2\}$,

- $C = \{2, \{2, 4\}\}$,

2) Tenemos:

- $(A \cap B) = \{\emptyset\}$,



Por lo tanto, $(A \cap B) \Delta C = \emptyset$.

3) Tenemos:

- $A \cup C = \{\emptyset, 2, \{3\}\}$,

- $\overline{A \cup C} = \{1, 3, \{2, 4\}\}$

Por lo tanto, $\mathcal{P}(\overline{A \cup C}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{2, 4\}, \{1, 3\}, \{1, \{2, 4\}\}, \{3, \{2, 4\}\}, \{1, 3, \{2, 4\}\}\}$.

2.1.24   $\{\emptyset, \mathcal{P}(A), \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{A\}, \{\{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\{\emptyset\}, A\}, \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, A\}, \{\{b\}, A\}, \{\{\emptyset\}, \{a\}, \{b\}\}, \{\{\emptyset\}, \{a\}, A\}, \{\{\emptyset\}, \{b\}, A\}, \{\{a\}, \{b\}, A\}\}$

2.1.25   Se omite.

2.1.26   Se omite.

2.1.27  


a.) $(A \Delta B) \times \mathcal{P}(C) = \{d, e\} \times \{\emptyset, C\} = \{(d, \emptyset), (d, C), (e, \emptyset), (e, C)\}$



b.) Se omite.

c.) Se omite.

2.2. Cardinalidad

2.2.1   $|B| = 5$

2.2.2   Se deduce de $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

2.2.3   Como $(A \cup B) \cap (A \cap B) = A \cap B$, entonces

$$|A \Delta B| = |A \cup B - (A \cap B)| = |A \cup B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$$

2.2.4  

1) Note que $|\mathcal{P}(B)| = 2^{|B|} = 32$, por lo que $|B| = 5$. Además

$$|A \Delta B| = |(A - B) \cup (B - A)| = |A - B| + |B - A|$$

pues $B - A$ y $A - B$ son conjuntos disjuntos. Así

- $|A - B| = |A| - |A \cap B| = 3 - 1 = 2$,

- $|B - A| = |B| - |B \cap A| = 5 - 1 = 4$,

Por lo tanto, $|\mathcal{P}(A \triangle B)| = 2^{|A \triangle B|} = 2^{2+4} = 64$.

2) Tenemos:

- $|B - A| = |B| - |B \cap A| = 5 - 1 = 4$,

Por lo tanto, $|(A \cap B) \times \mathcal{P}(B - A)| = |(A \cap B)| \cdot |\mathcal{P}(B - A)| = 1 \cdot 2^4 = 16$

2.2.5

1) Tenemos:

- $|A - B| = 4 \implies 4 = |A| - |A \cap B| \implies 4 = 5 - |A \cap B| \implies |A \cap B| = 1$,

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 3 - 1 = 7$,

Por lo tanto, $|\mathcal{P}(A \cap B) \times \mathcal{P}(A \cup B)| = |\mathcal{P}(A \cap B)| \cdot |\mathcal{P}(A \cup B)| = 2^{|A \cap B|} \cdot 2^{|A \cup B|} = 2^1 \cdot 2^7 = 256$

2) Tenemos:

- $|A - B| = 4 \implies 4 = |A| - |A \cap B| \implies 4 = 5 - |A \cap B| \implies |A \cap B| = 1$,

Por lo tanto, $|B - A| = |B| - |B \cap A| = 3 - 1 = 2$.

2.2.6

1) Tenemos:

- $|A - B| = |A| - |A \cap B| = 5 - 2 = 3$,

- $|\mathcal{P}(C)| = 8 \implies 2^{|C|} = 8 \implies |C| = 3$,

- $|C - A| = 1 \implies |C| - |C \cap A| = 1 \implies 3 - |C \cap A| = 1 \implies |C \cap A| = 2$

- $|A \cup C| = |A| + |C| - |A \cap C| = 5 + 3 - 2 = 6$,

Por lo tanto, $|(A - B) \times \mathcal{P}(A \cup C)| = |(A - B)| \cdot |\mathcal{P}(A \cup C)| = 3 \cdot 2^{|A \cup C|} = 3 \cdot 2^6 = 192$

2) Tenemos:

- $|B - A| = |B| - |B \cap A| = 4 - 2 = 2$

- $|C - A| = 1 \implies |C| - |C \cap A| = 1 \implies 3 - |C \cap A| = 1 \implies |C \cap A| = 2$

Por lo tanto, $|\mathcal{P}[(A \cap C) \times \mathcal{P}(B - A)]| = 2^{|(A \cap C) \times \mathcal{P}(B - A)|} = 2^{|A \cap C| \cdot 2^{|B - A|}} = 2^{2 \cdot 2^2} = 256$

2.2.7

a.) $|A - C| = |A| - |A \cap C| = |A| - 4 = 12 \implies |A| = 16$

b.) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \implies 23 = 16 + |B| - 11 \implies |B| = 18$

$$c.) \overline{|A \cup B \cup C|} = 5 \implies |A \cup B \cup C| = 25$$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 25 \\ \implies 16 + 18 + |C| - 11 - 4 - 8 + 3 &= 25 \implies |C| = 11 \end{aligned}$$

2.2.8

1) Tenemos:

- $|B - A| = |B| - |B \cap A| = 5 - 2 = 3$
- $|\mathcal{P}(C)| = 8 \implies 2^{|C|} = 8 \implies |C| = 3$
- $|C - A| = 1 \implies |C| - |C \cap A| = 1 \implies 3 - |C \cap A| = 1 \implies |C \cap A| = 2$

Por lo tanto, $|\mathcal{P}(B - A) \times (A \cap C)| = |\mathcal{P}(B - A)| \cdot |(A \cap C)| = 2^{|B-A|} \cdot 2 = 2^3 \cdot 2 = 16$

2) Tenemos:

- $|\mathcal{P}(C)| = 8 \implies 2^{|C|} = 8 \implies |C| = 3$
- $|C - A| = 1 \implies |C| - |C \cap A| = 1 \implies 3 - |C \cap A| = 1 \implies |C \cap A| = 2$
- $|A - C| = |A| - |A \cap C| = 4 - 2 = 2$

Por lo tanto, $|P[(A - C) \times C]| = 2^{|(A-C) \times C|} = 2^{|A-C| \cdot |C|} = 2^{2 \cdot 3} = 64$

2.2.9

1) Tenemos:

- $|\mathcal{P}(C)| = 128 \implies |C| = 7$
- $|C - A| = 4 \implies |C| - |C \cap A| = 4 \implies 7 - |C \cap A| = 4 \implies |C \cap A| = 3$
- $|A - C| = |A| - |A \cap C| = 8 - 3 = 5$
- $|A - (B \cup C)| = |A| - |A \cap (B \cup C)| = |A| - (|A| + |B \cup C| - |A \cup (B \cup C)|)$
 $= |A \cup B \cup C| - |B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| - |B \cup C|$
 $= 8 + 5 + 7 - 2 - 3 - 0 + 0 - (5 + 7) = 3$

Por lo tanto, $|(A - (B \cup C)) \times \mathcal{P}(A - C)| = |(A - (B \cup C))| \cdot |\mathcal{P}(A - C)| = 3 \cdot 2^{|A-C|} = 3 \cdot 2^5 = 96$

2) Tenemos:

- $|\mathcal{P}(C)| = 128 \implies |C| = 7$
- $|C - A| = 4 \implies |C| - |C \cap A| = 4 \implies 7 - |C \cap A| = 4 \implies |C \cap A| = 3$

Por lo tanto, $|P[(A \cap C) \times C]| = 2^{|(A \cap C) \times C|} = 2^{|A \cap C| \cdot |C|} = 2^{3 \cdot 7} = 2097152$

2.2.10

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 7 \implies |A \cap B| = 3.$$

$$\begin{aligned}
 |A \Delta B| + \mathcal{P}(A \cup (A \times B)) &= |(A \cup B) - (A \cap B)| + 2^{|A \cup (A \times B)|} \\
 &= |A| + |B| - |(A \cap B)| - |(A \cap B)| + 2^{|A|+|A \times B|} \text{ pues } A \cap (A \times B) = \emptyset \\
 &= 10 + 8 - 2 \cdot 3 + 2^{90}
 \end{aligned}$$

2.2.11   Tenemos:

- Como A y B son conjuntos disjuntos, $A \cap B = \emptyset$.
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 2 - 0 = 5$.
- $|A \times (A \cup B)| = |A| \cdot |A \cup B| = 3 \cdot 5 = 15$.

Por lo tanto, $|\mathcal{P}(A \times (A \cup B))| = 2^{|A \times (A \cup B)|} = 2^{15}$.

2.2.12   Tenemos:

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2 + 4 - 1 = 5$.
- $|\mathcal{P}(A \cup B)| = 2^{|A \cup B|} = 2^5 = 32$.
- $|A - B| = |A| - |A \cap B| = 2 - 1 = 1$.

Por lo tanto, $|\mathcal{P}(A \cup B) \times (A - B)| = |\mathcal{P}(A \cup B)| \cdot |A - B| = 32 \cdot 1 = 32$

2.2.13   Tenemos:

- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, donde $A - B$ y $B - A$ son disjuntos.
- $|A \Delta B| = |A - B| + |B - A| - |(A - B) \cap (B - A)| = (|A| - |A \cap B|) + (|B| - |B \cap A|) - |\emptyset| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 3 + 5 - 4 = 4$.
- $|C - B| = 3 \implies |C| - |C \cap B| = 3 \implies 4 - |C \cap B| = 3 \implies |C \cap B| = 1$.
- $\overline{B \cap C} = |\mathcal{U}| - |B \cap C| = 7 - 1 = 6$.
- $|(A \Delta B) \times \overline{(B \cap C)}| = |A \Delta B| \cdot |\overline{B \cap C}| = 4 \cdot 6 = 24$.

Por lo tanto, $\left| \mathcal{P} \left((A \Delta B) \times \overline{(B \cap C)} \right) \right| = 2^{|(A \Delta B) \times \overline{(B \cap C)}|} = 2^{24}$.

2.2.14   Tenemos:

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 9 + 10 - 3 = 16$.
- $|\mathcal{P}(C)| = 128 \implies 2^{|C|} = 2^7 \implies |C| = 7$.
- $|C - A| = 3 \implies |C| - |C \cap A| = 3 \implies 7 - |C \cap A| = 3 \implies |C \cap A| = 4$.
- $|A - C| = |A| - |A \cap C| = 9 - 4 = 5$.
- $|\mathcal{P}(A - C)| = 2^{|A - C|} = 2^5 = 32$.

Por lo tanto, $|(A \cup B) \times \mathcal{P}(A - C)| = |A \cup B| \cdot |\mathcal{P}(A - C)| = 16 \cdot 32$.

2.2.15

1) $|\mathcal{P}(A \times B)| = 4$.

2) $|\overline{\mathcal{P}(A \times B)}| = 2^9 - 2^2 = 508$

2.2.16



2.2.17

$$\begin{aligned} |\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) \times (A - B)| &= |\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| \cdot |(A - B)| \\ &= 2^{|\mathcal{P}(M)|} \cdot (|A| - |A \cap B|) \\ &= 2^{2^{|M|}} \cdot (|A| - |A \cap B|) \end{aligned}$$

Como $A \cap M = \emptyset$ y $|B - M| = |B| - |B \cap M| = 8$, entonces

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup M| &= |A| + |B| + |M| - |A \cap B| - |A \cap M| - |B \cap M| + |A \cap B \cap M| = 17 \\ &= |A| + |B| + 2 - |A \cap B| - |B \cap M| = 17 \\ &= |A| - |A \cap B| + |B| - |B \cap M| = 15 \implies |A| - |A \cap B| = 7 \end{aligned}$$

$$\therefore |\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) \times (A - B)| = 2^{2^2} \cdot 7$$

2.2.18   $2^{2^n} = 65536 \implies |A| = 4$

2.2.19   Se omite.

2.3. Simplificación usando leyes de conjuntos

2.3.1 Primera manera:

$$\begin{aligned} (A \cap \bar{B}) \cap \overline{(B \cap \bar{C})} &= (A \cap \bar{B}) \cap (\bar{B} \cup C) && \text{DM} \\ &= A \cap [\bar{B} \cap (\bar{B} \cup C)] && \text{Asoc} \\ &= A \cap \bar{B} && \text{Absorción} \end{aligned}$$

Segunda manera:

$$\begin{aligned} (A \cap \bar{B}) \cap \overline{(B \cap \bar{C})} &= (A \cap \bar{B}) \cap (\bar{B} \cup C) && \text{DM} \\ &= [(A \cap \bar{B}) \cap \bar{B}] \cup [(A \cap \bar{B}) \cap C] && \text{Distr} \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup [(A \cap \bar{B}) \cap C] && \text{Idemp} \\ &= A \cap \bar{B} && \text{Absorción} \end{aligned}$$

2.3.2

1)

- | | | |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| (1) | $\overline{B} \cap \overline{A} \cap [A \cup (\overline{B} \cup C) \cup (A \cap C)]$ | DM y DC |
| (2) | $\overline{B} \cap \overline{A} \cap [(\overline{B} \cup C) \cup (A \cup (A \cap C))]$ | Asoc |
| (3) | $\overline{B} \cap \overline{A} \cap [(\overline{B} \cup C) \cup A]$ | Abs |
| (4) | $\overline{B} \cup \overline{A} \cap [(\overline{B} \cup A) \cup C]$ | Asoc |
| (5) | $[(\overline{B} \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup A)] \cup [(\overline{B} \cup \overline{A}) \cap C]$ | Dist |
| (6) | $[\overline{B} \cup (\overline{A} \cap A)] \cup [(\overline{B} \cup \overline{A}) \cap C]$ | Dist |
| (7) | $[\overline{B} \cup \emptyset] \cup [(\overline{B} \cup \overline{A}) \cap C]$ | Inv |
| (8) | $\overline{B} \cup [(\overline{B} \cup \overline{A}) \cap C]$ | Ne |
| (9) | $[\overline{B} \cup (\overline{B} \cup \overline{A})] \cap [\overline{B} \cup C]$ | Dist |
| (10) | $(\overline{B} \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup C)$ | Ide |
| (11) | $\overline{B} \cup (\overline{A} \cap C)$ | Dist |

2)

- | | | |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| (1) | $[(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap C)] \cup [\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})]$ | Asoc |
| (2) | $[\overline{A} \cap (B \cup C)] \cup [\overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})]$ | Dist |
| (3) | $\overline{A} \cap [(B \cup C) \cup (\overline{B} \cup \overline{C})]$ | dist y DM |
| (4) | $\overline{A} \cap \mathcal{U}$ | Inv |
| (5) | \overline{A} | Ne |

3)

- | | | |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| (1) | $[(A \cap C) \cup (\overline{C} \cap A)] \cap [A \cap (B \cap (C \cup B))]$ | DM y DC |
| (2) | $[A \cap (C \cup \overline{C})] \cap (A \cap B)$ | Dist y Abs |
| (3) | $(A \cap \mathcal{U}) \cap (A \cap B)$ | Inv |
| (4) | $A \cap (A \cap B)$ | Ne |
| (5) | $A \cap B$ | Idem |

4)

- | | | |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| (1) | $[(\overline{Q} \cup \overline{P}) \cap (\overline{Q} \cap \overline{R})] \cup \{P \cap [R \cap (\overline{Q} \cap \overline{R})]\}$ | DM |
| (2) | $\{(\overline{Q} \cap P) \cap (\overline{Q} \cup \overline{R})\} \cup \{(P \cap R) \cap (\overline{Q} \cup \overline{R})\}$ | Asoc |
| (3) | $(\overline{Q} \cup \overline{R}) \cap \{(\overline{Q} \cap P) \cup (P \cap R)\}$ | Dist |
| (4) | $(\overline{Q} \cup \overline{R}) \cap \{P \cap (\overline{Q} \cup R)\}$ | Dist |
| (5) | $[(\overline{Q} \cup \overline{R}) \cap (\overline{Q} \cup R)] \cap P$ | Asoc |
| (6) | $[\overline{Q} \cup (\overline{R} \cap R)] \cap P$ | Dist |
| (7) | $(Q \cup \emptyset) \cap P$ | Inv |
| (8) | $Q \cap P$ | Ne |

5)

- (1) $(A \cap \bar{B}) \cup [C \cup (\bar{B} \cap C)] \cup A$ DM, DC y Asoc
 (2) $(A \cap \bar{B}) \cup (C \cup A)$ Abs
 (3) $[(A \cap \bar{B}) \cup A] \cup C$ Asoc
 (4) $A \cup C$ Abs

6)

- (1) $[(\bar{A} \cup \bar{B}) \cup (\bar{B} \cup A)] \cap (\bar{B} \cup C)$ DM
 (2) $[(A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})] \cap (\bar{B} \cup C)$ DM, DC
 (3) $[B \cap (A \cup \bar{A})] \cap (\bar{B} \cup C)$ Dist
 (4) $(B \cap \mathcal{U}) \cap (\bar{B} \cup C)$ Inv
 (5) $B \cap (\bar{B} \cup C)$ Ne
 (6) $(B \cap \bar{B}) \cap (B \cup C)$ Dist
 (7) $\emptyset \cup (B \cup C)$ Inv
 (8) $B \cup C$ Ne

7)

Primera manera:

$$\begin{aligned} \overline{(A \cup B) \cap C \cup \bar{B}} &= \overline{(\bar{A} \cap \bar{B}) \cup \bar{C} \cup \bar{B}} \quad \text{DM} \\ &= \overline{(\bar{A} \cap \bar{B})} \cap C \cap B \quad \text{DM} \\ &= (A \cup B) \cap B \cap C \quad \text{DM, Conmutatividad, Asociatividad, Absorción} \\ &= B \cap C \end{aligned}$$

Segunda manera:

$$\begin{aligned} \overline{(A \cup B) \cap C \cup \bar{B}} &= \overline{(A \cup B) \cap C} \cap B \quad \text{DM} \\ &= (A \cup B) \cap C \cap B \quad \text{DM} \\ &= (A \cup B) \cap B \cap C \quad \text{DM, Conmutatividad, Asociatividad, Absorción} \\ &= B \cap C \end{aligned}$$

2.4. Demostración de afirmaciones

2.4.1

- 1) Si $\exists x \in (A - B) \cap (B - A) \implies (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in B \wedge x \notin A)$
 $\implies (x \in A \wedge x \notin A) \wedge (x \in B \wedge x \notin B)$

lo cual es una contradicción.

- 2) En este caso, la doble inclusión se puede probar con una equivalencia.

$$x \in A - B \iff x \in A \wedge x \notin B \iff x \in A \wedge x \in \bar{B} \iff x \in A \cap \bar{B}$$

- 3) Como es demostrar que un conjunto es subconjunto de otro, entonces comenzamos con un elemento que pertenece al primero de ellos, y debemos llegar a la conclusión de que pertenece también al segundo.

Observe que como hay expresiones con producto cruz, entonces el elemento original debe ser un par ordenado:

$$\begin{aligned}
 & (x, y) \in [(A \times B) \cup (C \times D)] \\
 \implies & [(x, y) \in A \times B] \vee [(x, y) \in C \times D] \\
 \implies & (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in C \wedge y \in D) \\
 \implies & [(x \in A \wedge y \in B) \vee x \in C] \wedge [(x \in A \wedge y \in B) \vee y \in D] \\
 \implies & [(x \in A \vee x \in C) \wedge (y \in B \vee x \in C)] \wedge [(x \in A \vee y \in B) \wedge (y \in B \vee y \in D)] \\
 \implies & [(x \in A \vee x \in C)] \wedge [(y \in B \vee y \in D)] \quad (\text{simplificación}) \\
 \implies & (x \in A \cup C) \wedge (y \in B \cup D) \\
 \implies & (x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)
 \end{aligned}$$

4) Lo que tenemos es que demostrar la igualdad $C \cap (B - A) = \emptyset$, utilizando la premisa de que $x \in C \implies x \in A \cap B$. Como hay que demostrar que $C \cap (B - A) = \emptyset$, entonces nos vamos a dar un elemento en $C \cap (B - A)$, y llegar a una contradicción:

$$\begin{aligned}
 & x \in C \cap (B - A) \\
 \implies & x \in C \wedge x \in B - A \\
 \implies & (x \in A \cap B) \wedge (x \in B - A) \quad (\text{premisa}) \\
 \implies & (x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in B \wedge x \notin A) \\
 \implies & (x \in A) \wedge (x \notin A) \quad (\text{simplificación}) \\
 \implies & (x \in A) \wedge \neg(x \in A) \quad \text{contradicción}
 \end{aligned}$$

5) Como hay un producto cruz, entonces nuestro elemento inicial debe ser un par ordenado. Comenzamos tomando un elemento que está en cualquiera de los dos lados, y llegamos al conjunto del otro lado:

$$\begin{aligned}
 & (x, y) \in A \times \overline{B \cap C} \\
 \iff & x \in A \wedge y \in \overline{B \cap C} \\
 \iff & x \in A \wedge \neg(y \in B \cap C) \\
 \iff & x \in A \wedge \neg(y \in B \wedge y \in C) \\
 \iff & x \in A \wedge [\neg(y \in B) \vee \neg(y \in C)] \\
 \iff & x \in A \wedge (y \in \overline{B} \vee y \in \overline{C}) \\
 \iff & (x \in A \wedge y \in \overline{B}) \vee (x \in A \wedge y \in \overline{C}) \\
 \iff & [(x, y) \in A \times \overline{B}] \vee [(x, y) \in A \times \overline{C}] \\
 \iff & (x, y) \in (A \times \overline{B}) \cup (A \times \overline{C})
 \end{aligned}$$

6) En este caso la premisa es $x \in A \cup B \implies x \in C \cap D$, pero al observar que debemos comenzar

con $x \in \bar{C}$, y que D no es parte del lado derecho de la implicación, vamos a analizar la premisa:

$$\begin{aligned}
 & x \in A \cup B \rightarrow x \in C \cap D \\
 \Rightarrow & \neg(x \in A \cup B) \vee x \in C \cap D \\
 \Rightarrow & \neg(x \in A \vee x \in B) \vee (x \in C \wedge x \in D) \\
 \Rightarrow & (x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}) \vee (x \in C \wedge x \in D) \\
 \Rightarrow & (x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}) \vee (x \in C) \quad (\text{simplificación}) \\
 \Rightarrow & (x \in C) \vee (x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}) \quad (\text{conmutatividad}) \\
 \Rightarrow & (x \in \bar{C}) \rightarrow (x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B}) \quad (\text{ID})
 \end{aligned}$$

Ahora que ya comenzamos de \bar{C} , entonces:

$$\begin{aligned}
 & x \in \bar{C} \\
 \Rightarrow & x \in \bar{A} \wedge x \in \bar{B} \quad (\text{premisa}) \\
 \Rightarrow & x \in \bar{A} \quad (\text{simplificación}) \\
 \Rightarrow & x \in \bar{A} \vee x \in B \quad (\text{adjunción}) \\
 \Rightarrow & x \in \bar{A} \cup B
 \end{aligned}$$

7) Como es una igualdad, vamos a comenzar del lado “más grande”:

$$\begin{aligned}
 & x \in (A - B) \cap (C - B) \\
 \Leftrightarrow & (x \in A - B) \wedge (x \in C - B) \\
 \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in C \wedge x \notin B) \\
 \Leftrightarrow & x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B \wedge x \notin B \quad (\text{asoc. y conm.}) \\
 \Leftrightarrow & (x \in A \wedge x \in C) \wedge x \notin B \quad (\text{asoc. e idem.}) \\
 \Leftrightarrow & x \in (A \cap C) \wedge x \notin B \\
 \Leftrightarrow & x \in (A \cap C) - B
 \end{aligned}$$

8) Vamos a analizar la segunda premisa:

$$\begin{aligned}
 & C \cap \bar{B} = \emptyset \\
 \Rightarrow & \neg(x \in C \cap \bar{B}) \\
 \Rightarrow & \neg[(x \in C) \wedge (x \in \bar{B})] \\
 \Rightarrow & \neg(x \in C) \vee (x \in B)
 \end{aligned}$$

Observe que de la primera premisa $x \in C \rightarrow x \in \bar{A}$ se llega a que $\neg(x \in C) \vee x \in \bar{A}$. Así tenemos que:

$$\begin{aligned}
 & [\neg(x \in C) \vee x \in B] \wedge [\neg(x \in C) \vee x \in \bar{A}] \\
 & [\neg(x \in C)] \vee (x \in B \wedge x \in \bar{A}) \quad (\text{distributividad}) \\
 \Rightarrow & x \in C \rightarrow x \in (B \cap \bar{A}) \\
 \Rightarrow & x \in C \rightarrow x \in (B - A)
 \end{aligned}$$

9) Como es una igualdad, vamos a comenzar del lado “derecho”:

$$\begin{aligned}
 & x \in A - (B \cup C) \\
 \iff & x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \\
 \iff & x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\
 \iff & x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in \overline{C} \\
 \iff & x \in (A - B) \wedge x \in \overline{C} \\
 \iff & x \in (A - B) \cap \overline{C}
 \end{aligned}$$

10) Debemos probar la inclusión, para ello:

$$\begin{aligned}
 & x \in A - (B \cup C) \\
 \implies & x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \\
 \implies & x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C \\
 \implies & x \in A \wedge x \notin B \text{ simpl} \\
 \implies & x \in (A - B) \\
 \implies & x \in (A - B) \vee C \text{ adic} \\
 \implies & x \in (A - B) \cup C
 \end{aligned}$$

11) Debemos probar la implicación, para ello, tomando como hipótesis $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D)$:

$$\begin{aligned}
 & (x, y) \in (A \times \overline{D}) \\
 \implies & x \in A \wedge y \in \overline{D} \\
 \implies & x \in C \wedge y \notin D \\
 \implies & x \in C \wedge y \notin B \\
 \implies & x \in C \wedge y \in \overline{B} \\
 \implies & (x, y) \in C \times \overline{B}
 \end{aligned}$$

12) En este caso se debe probar una equivalencia; para ello, se probarán ambas implicaciones:

“ \implies ” Bajo la hipótesis $A \subseteq \overline{B}$, se debe probar $A \cap B = \emptyset$. Haremos esto por contradicción

$$\begin{aligned}
 & A \cap B \neq \emptyset \longrightarrow \exists x \text{ tal que } x \in A \wedge x \in B \\
 \implies & \text{si } x \in A \longrightarrow x \in \overline{B} \text{ (hipótesis)} \\
 \implies & x \in B \wedge x \in \overline{B} \text{ (contradicción)} \\
 \implies & A \cap B = \emptyset
 \end{aligned}$$

“ \impliedby ” Bajo la hipótesis $A \cap B = \emptyset$, hay que probar $A \subseteq \overline{B}$:

$$\begin{aligned} x \in A \quad \text{luego } x \notin B \quad \text{pues } A \cap B = \emptyset \\ \rightarrow x \in A \wedge x \in \overline{B} \\ A \subseteq \overline{B} \end{aligned}$$

13) En este caso se debe probar una igualdad entre conjuntos; es decir dos inclusiones:

“ \subseteq ” Debemos probar $A \times (B - C) \subseteq (A \times B) - (A \times C)$

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times (B - C) \\ \Rightarrow a \in A \wedge y \in (B - C) \\ \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C \\ \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C) \\ \Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \notin (A \times C) \\ \Rightarrow (x, y) \in (A \times B) - (A \times C) \end{aligned}$$

“ \supseteq ” Debemos probar $(A \times B) - (A \times C) \subseteq A \times (B - C)$:

$$\begin{aligned} (x, y) \in (A \times B) - (A \times C) \\ \Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \wedge (x, y) \notin (A \times C) \\ \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \notin A \vee y \notin B) \\ \Rightarrow \underbrace{(x \in A \wedge y \in B \wedge x \notin A)}_{F_0} \vee (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C) \\ \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B \wedge y \notin C) \quad \text{ley del neutro} \\ \Rightarrow x \in A \wedge y \in (B - C) \\ \Rightarrow (x, y) \in A \times (B - C) \end{aligned}$$

14) Debemos probar la implicación, para ello, tomando como hipótesis $(A \subseteq B \wedge C \subseteq D)$, debemos probar $(A \cup C \subseteq B \cup D)$:

$$\begin{aligned} x \in (A \cup C) \\ \Rightarrow x \in A \vee x \in C \\ \Rightarrow x \in B \vee x \in D \\ \Rightarrow x \in B \cup D \end{aligned}$$

15) Como es demostrar que un conjunto es subconjunto de otro, entonces comenzamos con un elemento que pertenece al primero de ellos, y debemos llegar a la conclusión de que pertenece también al segundo. Observe que como hay expresiones con producto cruz, entonces el elemento original debe ser

un par ordenado:

$$\begin{aligned}
 & (x, y) \in [A \times (B \cap C)] \\
 \implies & (x \in A) \wedge (y \in B \cap C) \\
 \implies & (x \in A) \wedge (y \in B \wedge y \in C) \\
 \implies & (x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \in C) \quad (\text{Adj. y Aso.}) \\
 \implies & (x \in A \times B) \wedge (x \in A \times C) \\
 \implies & x \in [(A \times B) \cap (A \times C)]
 \end{aligned}$$

16) Como es demostrar que un conjunto es subconjunto de otro, entonces comenzamos con un elemento que pertenece al primero de ellos, y debemos llegar a la conclusión de que pertenece también al segundo:

$$\begin{aligned}
 & x \in [(A \cup B) - C] \\
 \implies & x \in [(A \cup B) - C] \\
 \implies & (x \in A \cup B) \wedge (x \notin C) \\
 \implies & (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in \bar{C}) \\
 \implies & (x \in A \cup B) \wedge (x \in \bar{C}) \\
 \implies & x \in [(A \cup B) \cap \bar{C}]
 \end{aligned}$$

17) Se omite.

18) Asumiremos por contradicción, que existe un elemento que pertenece al conjunto:

$$\begin{aligned}
 & \exists x \in [(\overline{A \cup B \cup C}) \cap (A - C)] \\
 \implies & (x \in \overline{A \cup B \cup C}) \wedge (x \in A - C) \\
 \implies & (x \in \bar{A} \cap \bar{B} \vee x \in C) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \quad (\text{Prop. complemento}) \\
 \implies & [(x \notin A \wedge x \notin B) \vee x \in C] \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \\
 \implies & [(x \notin A \vee x \in C) \wedge (x \notin B \vee x \in C)] \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \quad (\text{Dis}) \\
 \implies & [(x \notin A \vee x \in C) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)] \wedge (x \notin B \vee x \in C) \quad (\text{Con., Aso. y Con.}) \\
 \implies & [(x \notin A \vee x \in C) \wedge \neg(x \notin A \vee x \in C)] \wedge (x \notin B \vee x \in C) \quad (\text{DM}) \\
 \implies & [(x \notin A \vee x \in C) \wedge \neg(x \notin A \vee x \in C)] \quad \text{contradicción}
 \end{aligned}$$

19) Como es una igualdad, podemos probar ambas inclusiones en una sola equivalencia:

$$\begin{aligned}
& x \in [(A - B) \cup (B - A)] \\
\iff & (x \in A - B) \vee (x \in B - A) \\
\iff & (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \\
\iff & [(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B] \wedge [(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \notin A] \quad (\text{Dis.}) \\
\iff & (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \notin B \vee x \notin A) \quad (\text{Dis.}) \\
\iff & (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \notin A) \quad (\text{Inv. y Ne.}) \\
\iff & (x \in A \cup B) \wedge (x \notin B \cap A) \\
\iff & x \in [(A \cup B) - (B \cap A)]
\end{aligned}$$

20) Vamos a analizar la segunda premisa:

$$\begin{aligned}
& D \cap E = \emptyset \\
\implies & \neg (x \in D \cap E) \\
\implies & \neg [(x \in D) \wedge (x \in E)] \\
\implies & \neg (x \in D) \vee \neg (x \in E) \\
\implies & (x \notin D) \vee (x \notin E)
\end{aligned}$$

Analizando cada una de las hipótesis se tiene que:

$ \begin{aligned} & (D \subseteq A - B) \\ \implies & x \in (D \subseteq A - B) \\ \implies & x \in D \rightarrow x \in (A - B) \\ \implies & x \notin D \vee x \in (A - B) \quad (\text{ID}) \\ \implies & x \notin D \vee (x \in A \wedge x \notin B) \end{aligned} $	$ \begin{aligned} & (E \subseteq A \cap B) \\ \implies & x \in (E \subseteq A \cap B) \\ \implies & x \in E \rightarrow x \in (A \cap B) \\ \implies & x \notin E \vee x \in (A \cap B) \quad (\text{ID}) \\ \implies & x \notin E \vee (x \in A \wedge x \in B) \end{aligned} $
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Y dado que $x \in A \wedge x \notin B$ y $x \in A \wedge x \in B$ no pueden ser simultáneamente verdaderas. En cualquier caso debe cumplirse que al menos una de $x \notin D$ o $x \notin E$ sea verdadera. Por lo tanto se demuestra la proposición.

21) Analizando la hipótesis se tiene que:

$$\begin{aligned}
& A \subseteq (B \cap D) \\
\implies & x \in [A \subseteq (B \cap D)] \\
\implies & x \notin A \vee x \in (B \cap D) \quad (\text{Def. e ID}) \\
\implies & x \notin A \vee (x \in B \wedge x \in D) \quad (\text{Def. e ID})
\end{aligned}$$

Continuando con la segunda premisa:

$$\begin{aligned} \bar{B} &\subseteq (\bar{A} \cup C) \\ \implies x \in \bar{B} \\ \implies x \notin B \\ \implies x \notin A &\quad (\text{Hipótesis}) \\ \implies x \in \bar{A} \vee x \in C &\quad (\text{Adi.}) \\ \implies x \in (\bar{A} \cup C) \end{aligned}$$

22) Analizando cada una de las hipótesis se tiene que:

$$\begin{array}{ll} 1. (\bar{C} \subseteq B) & 2. (B \cap A = \emptyset) \\ \implies x \in (\bar{C} \subseteq B) & \implies \neg [x \in (B \cap A)] \\ \implies x \notin \bar{C} \vee x \in B & \implies \neg [x \in B \wedge x \in A] \\ \implies x \in C \vee x \in B & \implies x \notin B \vee x \notin A \quad (\text{DM}) \end{array}$$

Retomando lo que debemos demostrar se tiene:

$$\begin{aligned} A &\in \mathcal{P}(C) \\ \implies A &\subseteq C \\ \implies x &\in A \\ \implies x &\notin B \quad (\text{Hipótesis 2}) \\ \implies x &\in C \quad (\text{Hipótesis 1}) \end{aligned}$$

2.4.2

1) Tome $A = \{0\}$ y $B = \{1\}$. Así $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{0\} \cup \{1\}) = \mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Por otro lado, $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(\{0\}) \cup \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{0\}\} \cup \{\emptyset, \{1\}\} = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$.



2) Se puede tomar por ejemplo $A = \emptyset$ y $C = \{0\}$. Así, $(A - B) \cup C = \emptyset \cup \{0\} = \{0\}$, mientras que $A - (B \cup C) = \emptyset$. Claramente, NO es cierto que $\{0\} \subset \emptyset$.

3) Como se trabaja con complemento, si se define un conjunto para A , se debería entonces definir un universo. Vamos a evitar definir el universo, pero vamos a suponer que es distinto de vacío, y que $x \in \mathcal{U}$. Sea $A = \emptyset$ y $B = \{x\}$, así: $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset \cap \{x\}} = \overline{\emptyset} = \mathcal{U}$. Por otro lado, $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{\emptyset} \cap \overline{\{x\}} = \mathcal{U} \cap (\mathcal{U} - \{x\}) = \mathcal{U} - \{x\}$. Claramente el primero no está contenido en el segundo.

4) Como se trabaja con condicional, definamos conjuntos que cumplen el antecedente pero falla la tesis. Sea $A = \{1\}$, $B = \{1\}$ y $C = \emptyset$, así: $A \cup B = \{1\}$, $A \Delta C = \{1\}$, pero $B \neq C$.

5) Como se trabaja con condicional, definamos conjuntos que cumplen el antecedente pero falla la tesis. Sea $A = \{4\}$, $B = \{1\}$ y $D = \{\emptyset, 1, 2\}$, así: $A \cap B = \emptyset \subset D$, $B \cap D = \{1\}$, pero $A \not\subseteq D$.

6) Como se trabaja con condicional, definamos conjuntos que cumplen el antecedente pero falla la tesis. Sea $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ y $C = \{1, 3\}$, así: $A \cap B = A \cap C = \{1\}$, pero claramente $B \neq C$.

2.4.3   Sea $A = \{1, 2\}$ por lo que $\bar{A} = \emptyset$, así se tiene:

- $\mathcal{P}(\bar{A}) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \implies \overline{\mathcal{P}(A)} = \emptyset$

Y claramente $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

2.4.4  

Hipótesis	$B = C$ por absorción sust. 1.) en 2.)
1.) $A \cup B = C$	$B \subseteq C$ — (a pie) —
2.) $(A \cup C) \cap B = C$	$x \in B \implies x \in A \cup B$ $\implies x \in C$ por 1.)
	$C \subseteq B$
	$x \in C \implies x \in (A \cup C) \cap B$ por 2.) $\implies x \in B$

2.4.5  

$$\begin{aligned}
 (a, b) \in A \times (B \cup C) &\implies a \in A \wedge b \in (B \cup C) \\
 &\implies a \in A \wedge (b \in B \vee b \in C) \\
 &\implies (a \in A \wedge b \in B) \vee (a \in A \wedge b \in C) \\
 &\implies (a, b) \in (A \times B) \vee (a, b) \in (A \times C) \\
 &\implies (a, b) \in (A \times B) \cup (A \times C)
 \end{aligned}$$

2.4.6   Se omite.

2.4.7   Se omite.

2.4.8   Se omite.

2.4.9   Se omite.

2.4.10   Se omite.

2.4.11   Se omite.

2.4.12   Se omite.

2.4.13   Se omite.

2.4.14   Se omite.

Soluciones del Capítulo 3

3.2. Operaciones con relaciones. Gráfico y matriz de una relación

3.2.1  

1) $G_{\mathcal{R}} = \{(1, 1), (1, 4), (1, 7), (4, 1), (7, 1)\}$

2)
$$\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R} = M_{\mathcal{R}} \odot M_{\mathcal{S}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) • $G_{\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R}} = \{(1, 1), (1, 4), (1, 7), (4, 7), (7, 7)\}$

• $G_{\overline{\mathcal{R}}} = \{(4, 4), (4, 7), (7, 4), (7, 7)\}$

Finalmente $G_{\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{R} - \overline{\mathcal{R}}} = \{(1, 1), (1, 4), (1, 7)\}$

3.2.2  

1) • $G_{\mathcal{R}} = \{(0, 0), (0, 2), (2, 2), (4, 0), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 6)\}$

• $G_{\mathcal{S}} = \{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (4, 0), (4, 2), (6, 0)\}$

2)
$$\overline{\mathcal{S}} \circ \mathcal{R}^{-1} = M_{\mathcal{R}^{-1}} \odot M_{\overline{\mathcal{S}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) • $G_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \{(0, 0), (0, 2), (0, 4), (0, 6), (2, 0), (2, 2), (2, 4), (4, 0), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 0), (6, 2), (6, 6)\}$

• $G_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = \{(0, 0), (0, 2), (2, 2), (4, 0), (4, 2)\}$

Finalmente:

$G_{(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) - (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})} = \{(0, 4), (0, 6), (2, 4), (4, 4), (4, 6), (6, 0), (6, 2), (6, 6)\}$.

3.2.3  

$$1) \quad G_{S \cup S^{-1}} = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$G_{\mathcal{R}} = \{(1,2), (1,3), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,2), (4,3)\}$$

Finalmente:

$$G_{S \cup S^{-1} - \mathcal{R}} = \{(1,4), (4,1)\}$$

$$2) \quad M_{\mathcal{R} \circ S - \overline{\mathcal{R}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.4

$$1) \quad \bullet G_{\mathcal{R}} = \{(3,4), (3,6), (4,3), (4,5), (4,6), (5,4), (5,6), (6,5), (6,6)\}$$

$$\bullet G_S = \{(3,3), (3,5), (4,5), (4,6), (5,3), (5,4), (5,6), (6,3), (6,6)\}$$

$$2) \quad \text{Primeramente se obtendrá: } M_{S \circ \mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ahora, necesitamos } M_{\overline{S \circ \mathcal{R}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Finalmente, } M_{\overline{S \circ \mathcal{R}} \cap \mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.5

$$1) \quad \bullet G_{\mathcal{R}} = \{(1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (2,5), (3,3), (5,3)\}$$

$$\bullet G_S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$$

$$\bullet G_{R^{-1} \circ \overline{S}} = \{(1,2), (2,1), (3,1), (3,2), (3,3), (3,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,5)\}$$

$$2) \quad \text{Primero obtendremos la matriz } M_{\overline{\mathcal{R}}} \text{ y la matriz } M_S$$

$$M_{\overline{\mathcal{R}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Finalmente } (M_{\overline{\mathcal{R}} \cap \mathcal{S}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.6

1) • $G_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} = \{(4,6), (6,6)\}$

2) Primeramente: $M_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Por lo tanto,

$$M_{\overline{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3) • $G_{\mathcal{R} \circ \mathcal{R}} = \{(3,3), (3,4), (4,3), (4,4), (6,3), (6,4)\}$

• $G_{\mathcal{S}^{-1}} = \{(3,3), (6,4), (3,6), (6,6)\}$

• $G_{(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \cap \mathcal{S}^{-1}} = \{(3,3), (6,4)\}$

3.2.7

1) • $G_{\mathcal{R}} = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (6,2)\}$

• $G_{\mathcal{S}} = \{(2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (4,8), (6,6), (8,6)\}$

2) Primero obtendremos la matriz las siguientes matrices

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{S^{-1}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{\mathcal{R}-S^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{\overline{\mathcal{R}-S^{-1}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{R} \cap S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Finalmente } M_{\overline{\mathcal{R}-S^{-1}} \cup \mathcal{R} \cap S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.8

1) De acuerdo a los datos anteriores tenemos:

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Además:

- $G_{\mathcal{R}} = \{(x, 0), (x, 3), (y, 1), (y, 3), (z, 2), (z, 3)\}$
- $G_S = \{(x, 0), (y, 0), (z, 0), (z, 1), (z, 2), (z, 3)\}$

2) Dado que:

- $G_{\mathcal{R}} = \{(x, 0), (x, 3), (y, 1), (y, 3), (z, 2), (z, 3)\}$
- $G_{\overline{S}} = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$

Tenemos: $G_{\mathcal{R} \cap \overline{S}} = \{(x, 3), (y, 1), (y, 3)\}$

3) Dado que:

- $G_{R^{-1}} = \{(0, x), (3, x), (1, y), (3, y), (2, z), (3, z)\}$
- $G_S = \{(x, 0), (y, 0), (z, 0), (z, 1), (z, 2), (z, 3)\}$

Tenemos: $G_{R^{-1} \circ S} = \{(x, x), (y, x), (z, x), (z, y), (z, z)\}$. Por lo que su matriz asociada corresponde a:

$$M_{R^{-1} \circ S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

De manera alterna, puede obtener dicho resultado realizando las siguientes operaciones con matrices:

$$M_S \odot M_{\mathcal{R}^{-1}} = M_S \odot M_{\mathcal{R}}^T$$

O sea:

$$M_S \odot M_{\mathcal{R}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore M_S \odot M_{\mathcal{R}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.9

3.2.10

1) Dado que:

- $G_{\mathcal{R}} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,5)\}$
- $G_S = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (2,5), (3,2), (3,5), (5,1), (5,5)\}$

Tenemos: $G_{\mathcal{R}-S} = \{(1,1), (2,3), (3,3), (5,2), (5,3)\}$

Por lo tanto: $G_{(\mathcal{R}-S)^{-1}} = \{(1,1), (3,2), (3,3), (2,5), (3,5)\}$

2) Dado que:

- $G_{\mathcal{R}} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,5), (2,3), (2,5), (3,2), (3,3), (3,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,5)\}$
- $G_S = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,1), (2,5), (3,2), (3,5), (5,1), (5,5)\}$
- $G_{\bar{S}} = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (5,2), (5,3)\}$

Tenemos: $G_{\mathcal{R} \cap S} = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,5), (3,2), (3,5), (5,1), (5,5)\}$

Por lo tanto: $G_{(\mathcal{R} \cap S) \circ \bar{S}} = \{(1,2), (1,3), (1,5), (2,2), (2,5), (3,2), (3,3), (3,5), (5,2), (5,5)\}$. Por lo que su matriz asociada corresponde a:

$$M_{(\mathcal{R} \cap S) \circ \bar{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De manera alterna, puede obtener dicho resultado realizando las siguientes operaciones con matrices:

$$M_{\overline{S}} \odot M_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = M_{\overline{S}} \odot (M_{\mathcal{R}} \wedge M_{\mathcal{S}})$$

O sea:

$$M_{\overline{S}} \odot M_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \left[\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore M_{\overline{S}} \odot M_{\mathcal{R} \cap \mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2.11   Se omite.

3.2.12  

$M_{\mathcal{R}}$	1	2	3	4	
1	1	1	1	1	
2	0	1	0	1	$\implies G_{\mathcal{R}} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,2), (4,4)\}$
3	1	1	1	1	
4	0	1	0	1	



$$G_{\mathcal{S}^{-1}} = \{(1,1), (4,1), (3,2), (2,4), (3,4)\}$$

$$G_{\overline{\mathcal{R}}} = \{(2,1), (2,3), (4,1), (4,3)\}$$



$$\mathcal{S}^{-1} \cap \overline{\mathcal{R}} = \{(4,1)\}$$

3.2.13   Se omite.

3.2.14   Se omite.

3.2.15   Si $b \in (\mathcal{R} \cap \mathcal{S})[A] \implies \exists a \in A$ tal que $a \mathcal{R} \cap \mathcal{S} b$, por tanto $a \mathcal{R} b$ y $a \mathcal{S} b$, es decir, $b \in \mathcal{R}[A] \cap \mathcal{S}[A]$

3.3. Propiedades de las relaciones

3.3.1   Por hipótesis tenemos que \mathcal{R} es antisimétrica, por lo que

$$(\forall a_1, b_1 \in A)(a_1 \mathcal{R} b_1 \wedge b_1 \mathcal{R} a_1 \implies a_1 = b_1)$$

Debemos demostrar que $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}$ es antisimétrica, o sea:

$$(\forall a, b \in A)(a \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S} b \wedge b \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S} a \implies a = b)$$

Sean $a, b \in A$, tenemos:

$$\begin{aligned} a \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S} b \wedge b \mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S} a &\implies (a \mathcal{R}^{-1} b \wedge a \mathcal{S} b) \wedge (b \mathcal{R}^{-1} a \wedge b \mathcal{S} a) \\ &\implies (b \mathcal{R} a \wedge a \mathcal{S} b) \wedge (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{S} a) && \text{definición de relación inversa} \\ &\implies (b \mathcal{R} a \wedge a \mathcal{R} b) \wedge (a \mathcal{S} b \wedge b \mathcal{S} a) && \text{conmutatividad y Asociatividad} \\ &\implies (a = b) \wedge (a \mathcal{S} b \wedge b \mathcal{S} a) && \text{hipótesis} \\ &\implies a = b && \text{simplificación} \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{R}^{-1} \cap \mathcal{S}$ es antisimétrica.

3.3.2  

1)

$$\begin{aligned} a \left(\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \right) b &\implies \exists c \in \mathcal{A} \text{ t.q.} \\ &\implies a \mathcal{R} c \wedge c \mathcal{R}^{-1} b \\ &\implies c \mathcal{R}^{-1} b \wedge a \mathcal{R} c \\ &\implies b \mathcal{R} c \wedge c \mathcal{R}^{-1} a \\ &\implies b \left(\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R} \right) a \end{aligned}$$

2) Para que $\mathcal{R}^{-1} \circ \mathcal{R}$ sea reflexiva, tanto \mathcal{R}^{-1} como \mathcal{R} sean iguales.



3.3.3  

$$\begin{aligned} a(\mathcal{R} \cup \mathcal{S})b \wedge b \mathcal{R} c &\implies (a \mathcal{R} b \vee a \mathcal{S} b) \wedge b \mathcal{R} c \\ &\implies (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c) \vee (a \mathcal{S} b \wedge b \mathcal{R} c) \\ &\implies a \mathcal{R} c \vee (a(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})c) \\ &\implies a[\mathcal{R} \cup (\mathcal{R} \circ \mathcal{S})]c \end{aligned}$$

3.3.4   Debemos mostrar que $(a, b) \in G_{\mathcal{S} \circ \mathcal{R}} \implies (a, b) \in G_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}}$

Si $(a, b) \in G_{S \circ \mathcal{R}} \implies \exists c \in A$ tal que: $a \mathcal{R} c \wedge c S b$. Simplificando lo anterior tenemos: $a \mathcal{R} c$

$$\begin{array}{ll} a \mathcal{R} c \vee a S c & \text{adición} \\ c S b \vee c \mathcal{R} b & \text{adición} \\ (a \mathcal{R} c \vee a S c) \wedge (c \mathcal{R} b \vee c S b) & \text{adjunción} \\ a(\mathcal{R} \cup S)c & \end{array}$$

3.3.5   Debemos probar que $a(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1})b \wedge b(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1})c$, entonces $a(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1})c$

$$\begin{array}{ll} a(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1})b \wedge b(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1})c & \\ (a \mathcal{R} b \wedge a \mathcal{R}^{-1}b) \wedge (b \mathcal{R} c \wedge b \mathcal{R}^{-1}c) & \\ (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c) \wedge (a \mathcal{R}^{-1}b \wedge b \mathcal{R}^{-1}c) & \\ (a \mathcal{R} c) \wedge (c \mathcal{R} b \vee b \mathcal{R} a) & \text{hip } \mathcal{R} \text{ es transitiva} \\ (a \mathcal{R} c) \wedge (c \mathcal{R} a) & \text{hip } \mathcal{R} \text{ es transitiva} \\ a \mathcal{R} c \wedge a \mathcal{R}^{-1}c & \\ a(\mathcal{R} \cap \mathcal{R}^{-1})c & \end{array}$$

3.3.6   Tenemos por hipótesis:

H1. \mathcal{R} es transitiva, osea, $(\forall a_1, b_1, c_1 \in A) [a_1 \mathcal{R} b_1 \wedge b_1 \mathcal{R} c_1 \implies a_1 \mathcal{R} c_1]$.

H2. \mathcal{S} es simétrica, osea, $(\forall a_2, b_2 \in A) [a_2 S b_2 \implies b_2 S a_2]$.

Debemos demostrar que $a(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})b \wedge b \mathcal{R} c \implies b(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})c$, así tenemos:

$$\begin{array}{ll} a(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})b \wedge b \mathcal{R} c & \implies a \mathcal{R} b \wedge a S b \wedge b \mathcal{R} c \\ & \implies a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \wedge a S b \quad \text{conmutatividad} \\ & \implies a \mathcal{R} c \wedge a S b \quad \mathcal{R} \text{ es transitiva} \\ & \implies a \mathcal{R} c \wedge b S a \quad \mathcal{S} \text{ es simétrica} \\ & \implies b S a \wedge a \mathcal{R} c \quad \text{conmutatividad} \\ & \implies b(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})c \end{array}$$

3.3.7  

1) Tenemos por hipótesis:

H1. \mathcal{R} es reflexiva, o sea, $(\forall a_1 \in A) [a_1 \mathcal{R} a_1]$.

H2. \mathcal{S} es reflexiva, o sea, $(\forall a_2 \in A) [a_2 \mathcal{S} a_2]$.

Debemos demostrar que $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ es reflexiva, o sea $(\forall a \in A) [a \mathcal{R} \circ \mathcal{S} a]$.

Por hipótesis (H1 y H2), tenemos que para cualquier $a \in A$ se cumple:

$$a \mathcal{S} a \wedge a \mathcal{R} a \implies a(\mathcal{R} \circ \mathcal{S})a$$

Por lo tanto se cumple que $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ es reflexiva.

2) Supongamos que tenemos un conjunto $T = \{a, b\}$ tal que $G_{\mathcal{R}} = \{(a, b)\}$ y sea $G_{\mathcal{S}} = \{(b, a)\}$, tal que tanto \mathcal{R} y \mathcal{S} son antisimétricas.

Tenemos que $G_{\mathcal{R} \cup \mathcal{S}} = \{(a, b), (b, a)\}$, así se cumple que:

$$(a, b) \mathcal{R} \cup \mathcal{S}(b, a) \implies a = b$$

Y esto es falso, por lo tanto $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ no es antisimétrica.

3.3.8   Se omite.

3.3.9   Se omite.

3.4. Relaciones de equivalencia

3.4.1  

1) Para demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia, debemos probar que \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.

- **Reflexiva:** $\iff (\forall a \in \mathbb{N}) (a \mathcal{R} a)$

Sea $a \in \mathbb{N}$, así tenemos

$$a \mathcal{R} a \iff [\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = a + 4k]$$

Donde basta tomar $k = 0$, por lo cual concluimos que $a \mathcal{R} a$.

- **Simétrica:** $\iff (\forall a, b \in \mathbb{N}) (a \mathcal{R} b \implies b \mathcal{R} a)$

Sea $a, b \in \mathbb{N}$, así tenemos que si

$$\begin{aligned} a \mathcal{R} b &\implies \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = b + 4k \\ &\implies a - 4k = b \\ &\implies a + 4k_1 = b \quad \text{con } k_1 = -k \end{aligned}$$

Como $k_1 \in \mathbb{Z}$, tenemos que \mathcal{R} es simétrica.

- **Transitiva**: $\iff (\forall a, b, c \in \mathbb{N}) (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies a \mathcal{R} c)$

Sea $a, b, c \in \mathbb{N}$, así tenemos que si

$$\begin{aligned} a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c &\implies [\exists k_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a = b + 4k_1] \wedge [\exists k_2 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } b = c + 4k_2] \\ &\implies a = c + 4k_2 + 4k_1 \\ &\implies a = c + 4(k_2 + k_1) \\ &\implies a = c + 4k_3 \quad \text{con } k_3 = k_2 + k_1 \end{aligned}$$

Como $k_3 \in \mathbb{Z}$, tenemos que \mathcal{R} es transitiva.

- 2) Tenemos $\overset{\bullet}{2} = \{b \in \mathbb{N} \text{ tal que } 2 \mathcal{R} b\}$, por lo que debe darse que $\exists k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$2 = b + 4k \implies 2 - 4k = b$$

Por lo tanto se tiene $\overset{\bullet}{2} = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$

- 3) Dado que se solicita el conjunto cociente, debemos encontrar todas las posibles clases de equivalencia de a con $a \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ll} \overset{\bullet}{0} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\} & \overset{\bullet}{2} = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\} \\ \overset{\bullet}{1} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, \dots\} & \overset{\bullet}{3} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\} \end{array}$$

Por lo tanto, $\mathbb{Z} / \mathcal{R} = \{\overset{\bullet}{0}, \overset{\bullet}{1}, \overset{\bullet}{2}, \overset{\bullet}{3}\}$

3.4.2

- 1) Para demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia, debemos probar que \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.

- **Reflexiva**: $\iff (\forall a \in \mathbb{Z}) (a \mathcal{R} a)$

Sea $a \in \mathbb{Z}$, así tenemos

$$a \mathcal{R} a \iff [a = a \vee a + a = 12]$$

Donde claramente se cumple que $a = a$, por lo cual concluimos que $a \mathcal{R} a$.

- **Simétrica:** $\iff (\forall a, b \in \mathbb{Z}) (a \mathcal{R}b \implies b \mathcal{R}a)$

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, así tenemos que si

$$\begin{aligned} a \mathcal{R}b &\implies a = b \vee a + b = 12 \\ &\implies b = a \vee b + a = 12 && \text{Conmutatividad} \\ &\implies b \mathcal{R}a \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{R} es simétrica.

- **Transitiva:** $\iff (\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) (a \mathcal{R}b \wedge b \mathcal{R}c \implies a \mathcal{R}c)$

Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$, así tenemos que si

$$a \mathcal{R}b \wedge b \mathcal{R}c \implies [a = b \vee a + b = 12] \wedge [b = c \vee b + c = 12]$$

Note que pueden darse cuatro combinaciones, por lo que analizamos cada una de ellas:

- $a = b \wedge b = c \implies a = c$, por lo tanto se cumple $a \mathcal{R}c$
- $a = b \wedge b + c = 12 \implies a + c = 12$, por lo tanto se cumple $a \mathcal{R}c$
- $a + b = 12 \wedge b = c \implies a + c = 12$, por lo tanto se cumple $a \mathcal{R}c$
- $a + b = 12 \wedge b + c = 12 \implies a = c$, por lo tanto se cumple $a \mathcal{R}c$

Por lo tanto se concluye \mathcal{R} es transitiva.

2) Dado que se solicita el conjunto cociente, debemos encontrar todas las posibles clases de equivalencia de a con $a \in \mathbb{Z}^+$.

$$\begin{array}{lll} \overset{\bullet}{1} = \{1, 11\} & \overset{\bullet}{3} = \{3, 9\} & \overset{\bullet}{5} = \{5, 7\} \\ \overset{\bullet}{2} = \{2, 10\} & \overset{\bullet}{4} = \{4, 8\} & \overset{\bullet}{6} = \{6\} \end{array}$$

Claramente se cumple que $\overset{\bullet}{1} = 11, \overset{\bullet}{2} = 10, \overset{\bullet}{3} = 9, \overset{\bullet}{4} = 8, \overset{\bullet}{5} = 7$.

Luego solo quedan las clases que cumplen que $a = a$, así tenemos:

Por lo tanto, $\mathbb{Z} / \mathcal{R} = \{\overset{\bullet}{1}, \overset{\bullet}{2}, \overset{\bullet}{3}, \overset{\bullet}{4}, \overset{\bullet}{5}, \overset{\bullet}{6}, \overset{\bullet}{12}, \overset{\bullet}{13}, \dots\}$

3.4.3

1) Para demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia, debemos probar que \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.

- **Reflexiva:** $\iff (\forall x \in \mathbb{Q}) (x \mathcal{R}x)$

Sea $x \in \mathbb{Q}$, así tenemos

$$x \mathcal{R}x \iff \left[\exists h \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = x + \frac{h}{5} \right]$$

Donde basta tomar $h = 0$, por lo cual concluimos que $x \mathcal{R}x$.

- **Simétrica:** $\iff (\forall x, y \in \mathbb{Q}) (x \mathcal{R}y \implies y \mathcal{R}x)$

Sea $x, y \in \mathbb{Q}$, así tenemos que si

$$\begin{aligned} x \mathcal{R}y &\implies \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = y + \frac{h}{5} \\ &\implies y = x - \frac{h}{5} \\ &\implies y = x + \frac{h_1}{5} \quad \text{con } h_1 = -h \end{aligned}$$

Como $h_1 \in \mathbb{Z}$, tenemos que \mathcal{R} es simétrica.

- **Transitiva:** $\iff (\forall x, y, z \in \mathbb{Q}) (x \mathcal{R}y \wedge y \mathcal{R}z \implies x \mathcal{R}z)$

Sea $x, y, z \in \mathbb{Q}$, así tenemos que si

$$\begin{aligned} x \mathcal{R}y \wedge y \mathcal{R}z &\implies \left[\exists h_1 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x = y + \frac{h_1}{5} \right] \wedge \left[\exists h_2 \in \mathbb{Z} \text{ tal que } y = z + \frac{h_2}{5} \right] \\ &\implies x = z + \frac{h_2}{5} + \frac{h_1}{5} \\ &\implies x = z + \frac{h_2 + h_1}{5} \\ &\implies x = z + \frac{h_3}{5} \quad \text{con } h_3 = h_2 + h_1 \end{aligned}$$

Como $h_3 \in \mathbb{Z}$, tenemos que \mathcal{R} es transitiva.

- 2) Tenemos $\frac{1}{2} = \left\{ y \in \mathbb{Q} \text{ tal que } \frac{1}{2} \mathcal{R}y \right\}$, por lo que debe darse que $\exists h \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\frac{1}{2} = y + \frac{h}{5} \implies \frac{1}{2} - \frac{h}{5} = y \implies \frac{5 - 2h}{10} = y$$

Por lo tanto se tiene $\frac{1}{2} = \left\{ \dots, \frac{1}{10}, \frac{3}{10}, \frac{1}{2}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}, \dots \right\}$

3.4.4

- 1) Para demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia, debemos probar que \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.

- **Reflexiva:** $\iff (\forall a \in \mathbb{Z}) (a \mathcal{R} a)$

Sea $a \in \mathbb{Z}$, así tenemos

$$a \mathcal{R} a \iff [a = a \vee a + a = 8]$$

Donde claramente se cumple que $a = a$, por lo cual concluimos que $a \mathcal{R} a$.

- **Simétrica:** $\iff (\forall a, b \in \mathbb{Z}) (a \mathcal{R} b \implies b \mathcal{R} a)$

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, así tenemos que si

$$\begin{aligned} a \mathcal{R} b &\implies a = b \vee a + b = 8 \\ &\implies b = a \vee b + a = 8 \quad \text{Conmutatividad} \\ &\implies b \mathcal{R} a \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{R} es simétrica.

- **Transitiva:** $\iff (\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies a \mathcal{R} c)$

Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$, así tenemos que si

$$a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies [a = b \vee a + b = 8] \wedge [b = c \vee b + c = 8]$$



Note que pueden darse cuatro combinaciones, por lo que analizamos cada una de ellas:

- $a = b \wedge b = c \implies a = c$, por lo tanto se cumple $a \mathcal{R} c$
- $a = b \wedge b + c = 8 \implies a + c = 8$, por lo tanto se cumple $a \mathcal{R} c$
- $a + b = 8 \wedge b = c \implies a + c = 8$, por lo tanto se cumple $a \mathcal{R} c$
- $a + b = 8 \wedge b + c = 12 \implies a = c$, por lo tanto se cumple $a \mathcal{R} c$

Por lo tanto se concluye \mathcal{R} es transitiva.

- 2) Tenemos $\overset{\bullet}{-10} = \{b \in \mathbb{Q} \text{ tal que } -10 \mathcal{R} b\}$, por lo que se cumple que:

$$\overset{\bullet}{-10} = \{-10, 18\}$$

3.4.5   De acuerdo con la información anterior, es claro que \mathcal{R} particiona a U en dos clases de equivalencia (francés e inglés), donde cada una está formada por todos los estudiantes de la academia que eligieron estudiar un idioma. Mientras que \mathcal{S} , particiona a U en dos clases de equivalencia, donde cada una está formada por todos los estudiantes que tienen el mismo sexo (H,M).

Además $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ particiona a U en cuatro calses de equivalencia, donde cada una está formada por todos los estudiantes de la academia en el mismo idioma y en el mismo sexo.

Así tenemos:

$$\mathcal{R} = \{\text{francés, inglés}\}$$

$$\mathcal{S} = \{\text{hombre, mujer}\}$$

De lo anterior, podemos definir:

$$\overset{\bullet}{f} = \{\text{Juan, Ana, Mario, Pedro, Inés y María}\}$$

$$\overset{\bullet}{i} = \{\text{Marco, Cindy, Emily, Tomás, Carlos, Manuel, Felipe y Héctor}\}$$

$$\overset{\bullet}{h} = \{\text{hombre}\}$$

$$\overset{\bullet}{m} = \{\text{mujer}\}$$

Por tanto. $U / \mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{\overset{\bullet}{f}, \overset{\bullet}{i}, \overset{\bullet}{h}, \overset{\bullet}{m}\}$

3.4.6

1) Para demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia, debemos probar que \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.

- **Reflexiva:** $\iff (\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) ((a, b) \mathcal{R} (a, b))$

Sea $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, así tenemos

$$(a, b) \mathcal{R} (a, b) \iff [2(a - a) = 5(b - b)]$$

Donde claramente se cumple que $0 = 0$, por lo cual concluimos que $(a, b) \mathcal{R} (a, b)$.

- **Simétrica:** $\iff (\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) (a, b) \mathcal{R} (c, d) \implies (c, d) \mathcal{R} (a, b)$

Sea $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, así tenemos que si

$$\begin{aligned} (a, b) \mathcal{R} (c, d) &\implies [2(a - c) = 5(b - d)] \\ &\implies [-2(c - a) = -5(d - b)] \quad \text{sacar a factor común un } (-) \\ &\implies [2(c - a) = 5(d - b)] \\ &\implies (c, d) \mathcal{R} (a, b) \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{R} es simétrica.

- **Transitiva:** $\iff (\forall (a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) (a, b) \mathcal{R} (c, d) \wedge (c, d) \mathcal{R} (e, f) \implies (a, b) \mathcal{R} (e, f)$

Sea $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, así tenemos que si

$$(a, b) \mathcal{R} (c, d) \wedge (c, d) \mathcal{R} (e, f) \implies [2(a - c) = 5(b - d)] \wedge [2(c - e) = 5(d - f)]$$

Sumando ambos resultados parciales tenemos:

$$\begin{aligned}
 2(a - c) &= 5(b - d) \\
 &+ \\
 2(c - e) &= 5(d - f) \\
 2a - \cancel{2c} + \cancel{2c} - 2e &= 5b - \cancel{5d} + \cancel{5d} - 5f \\
 2a - 2e &= 5b - 5f \\
 2(a - e) &= 5(b - f) \\
 \implies (a, b) \mathcal{R}(e, f)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye \mathcal{R} es transitiva.

2) Tenemos $[(2, -3)] = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ tal que } (2, -3) \mathcal{R}(a, b)\}$, por lo que debe darse que:

$$(2, -3) \mathcal{R}(a, b) \implies 2(2 - a) = 5(-3 - b) \implies \frac{2a - 19}{5} = b$$

Por lo tanto se tiene $[(2, -3)] = \{\dots, (12, 5), (34, 3), (-8, -7), \dots\}$

3.4.7

- **Reflexiva:** $\iff (\forall (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) ((a, b) \mathcal{R}(a, b))$

Sea $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, así tenemos

$$(a, b) \mathcal{R}(a, b) \iff [3(a - a) = 2(b - b)]$$

Donde claramente se cumple que $0 = 0$, por lo cual concluimos que $(a, b) \mathcal{R}(a, b)$.

- **Simétrica:** $\iff (\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) (a, b) \mathcal{R}(c, d) \implies (c, d) \mathcal{R}(a, b)$

Sea $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, así tenemos que si

$$\begin{aligned}
 (a, b) \mathcal{R}(c, d) &\implies [3(a - c) = 2(b - d)] \\
 &\implies [-3(c - a) = -2(d - b)] \quad \text{sacar a factor común un } (-) \\
 &\implies [3(c - a) = 2(d - b)] \\
 &\implies (c, d) \mathcal{R}(a, b)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{R} es simétrica.

- **Transitiva:** $\iff (\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) (a,b) \mathcal{R}(c,d) \wedge (c,d) \mathcal{R}(e,f) \implies (a,b) \mathcal{R}(e,f)$
Sea $(a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, así tenemos que si

$$(a,b) \mathcal{R}(c,d) \wedge (c,d) \mathcal{R}(e,f) \implies [3(a-c) = 2(b-d)] \wedge [3(c-e) = 2(d-f)]$$

Sumando ambos resultados parciales tenemos:

$$\begin{aligned} 3(a-c) &= 2(b-d) \\ &+ \\ 3(c-e) &= 2(d-f) \\ 3a - \cancel{3c} + \cancel{3c} - 3e &= 2b - \cancel{2d} + \cancel{2d} - 2f \\ 3a - 3e &= 2b - 2f \\ 3(a-e) &= 2(b-f) \\ &\implies (a,b) \mathcal{R}(e,f) \end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye \mathcal{R} es transitiva.

- **Antisimétrica** $\iff (\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) (a,b) \mathcal{R}(c,d) \wedge (c,d) \mathcal{R}(a,b) \implies (a,b) = (c,d)$

No es antisimétrica, pues basta ver que $(-2,0) \mathcal{R}(4,9) \wedge (4,9) \mathcal{R}(-2,0)$, pero $(4,9) \neq (-2,0)$

- **Total**

No es total, pues basta ver que $(1,1) \not\mathcal{R}(2,2)$

3.4.8

1) Para demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia, debemos probar que \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.

- **Reflexiva:** $\iff (\forall M \in \mathcal{P}(A)) (M \mathcal{R} M)$
Sea $M \in \mathcal{P}(A)$, así tenemos

$$M \mathcal{R} M \iff |M| = |M|$$

Dado que la afirmación anterior es verdadera, concluimos que $M \mathcal{R} M$.

- **Simétrica:** $\iff (\forall M, N \in \mathcal{P}(A)) (M \mathcal{R} N \implies N \mathcal{R} M)$
Sea $M, N \in \mathcal{P}(A)$, así tenemos que si

$$\begin{aligned} M \mathcal{R} N &\implies |M| = |N| \\ &\implies |N| = |M| \\ &\implies N \mathcal{R} M \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{R} es simétrica.

- **Transitiva** : $\iff (\forall M, N, O \in \mathcal{P}(A)) (M \mathcal{R} N \wedge N \mathcal{R} O \implies M \mathcal{R} O)$
Sea $M, N, O \in \mathcal{P}(A)$, así tenemos que si

$$\begin{aligned} M \mathcal{R} N \wedge N \mathcal{R} O &\implies |M| = |N| \wedge |N| = |O| \\ &\implies |M| = |O| \\ &\implies M \mathcal{R} O \end{aligned}$$

Así tenemos que \mathcal{R} es transitiva.

- 2) Tenemos $\overset{\bullet}{\{a, c\}} = \{M \in \mathcal{P}(A) \text{ tal que } |\{a, c\}| = |M|\}$. Como $|\{a, c\}| = 2$, se cumple que:

$$|\overset{\bullet}{\{a, c\}}| = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$$

3.4.9

Tenemos $(1, 9) = \{(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ tal que } (1, 9) \mathcal{R} (a, b)\}$, por lo que debe darse que:

$$1 + b = 9 + a \implies b = 8 + a$$

Así tenemos que:

$$\overset{\bullet}{(1, 9)} = \{\dots, (-2, 6), (-1, 7), (0, 8), (1, 9), (2, 10), \dots\}$$

3.4.10

1) Para demostrar que \mathcal{R} es una relación de equivalencia, debemos probar que \mathcal{R} es reflexiva, simétrica y transitiva.

- **Reflexiva**: $\iff (\forall a \in \mathbb{Z}) (a \mathcal{R} a)$
Sea $a \in \mathbb{Z}$, así tenemos

$$a \mathcal{R} a \iff a^2 + a = a^2 + a$$

Dado que la afirmación anterior es verdadera, concluimos que $a \mathcal{R} a$.

- **Simétrica:** $\iff (\forall a, b \in \mathbb{Z}) (a \mathcal{R} b \implies b \mathcal{R} a)$

Sea $a, b \in \mathbb{Z}$, así tenemos que si

$$\begin{aligned} a \mathcal{R} b &\implies a^2 + b = b^2 + a \\ &\implies b^2 + a = b + a^2 \\ &\implies b \mathcal{R} a \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{R} es simétrica.

- **Transitiva:** $\iff (\forall a, b, c \in \mathbb{Z}) (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies a \mathcal{R} c)$

Sea $a, b, c \in \mathbb{Z}$, así tenemos que si

$$\begin{aligned} a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c &\implies [a^2 + b = b^2 + a] \wedge [b^2 + c = c^2 + b] \\ &\implies a^2 + b + b^2 + c = b^2 + a + c^2 + b \\ &\implies a^2 + c = a + c^2 \\ &\implies a \mathcal{R} c \end{aligned}$$

Por lo tanto \mathcal{R} es transitiva.

- 2) Tenemos $\dot{1} = \{b \in \mathbb{Z} \text{ tal que } 1 \mathcal{R} b\}$, por lo que debe darse que:

$$1^2 + b = b^2 + 1 \implies 0 = b^2 - b \implies 0 = b(b - 1)$$

Por lo que debe darse que $b = 0 \vee b = 1$, así tenemos que: $\dot{1} = \{0, 1\}$

3.4.11   Se omite.

3.4.12   Se omite.

3.4.13   Se omite.

3.4.14  

a.) **Reflexividad:** $\forall a \in \mathbb{Z}, a \mathcal{R} a$ pues $a = a$

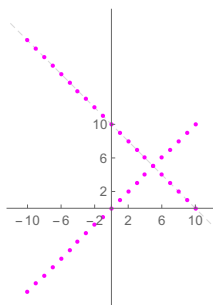
b.) **Simetría:** Si $a \mathcal{R} b \implies a = b \vee a + b = 10 \implies b = a \vee b + a = 10 \implies b \mathcal{R} a$

c.) **Transitividad:** Si $a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c \implies (a = b \vee a + b = 10) \wedge (b = c \vee b + c = 10)$.

- Si $a = b \vee b = c \implies a \mathcal{R} c$

- Si $a + b = 10 \wedge b + c = 10 \implies b = 10 - a \implies -a + c = 10 \implies a = c \implies a \mathcal{R} c$

Si $a \in \mathbb{Z} \implies [a] = \{a, 10 - a\}$. La representación gráfica sería un conjunto de pares ordenados $\{(a, 10 - a) \text{ tal que } a \in \mathbb{Z}\}$





3.4.15   Se omite.

3.4.16   Se omite.

3.4.17   Se omite.

3.4.18   Se omite.

3.4.19   Se omite.

3.4.20   Con la tabla que sigue, complete la respuesta!

\mathcal{R}	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$	Clases
$\{1\}$	1	0	0	1	1	0	1	
$\{2\}$	0	1	0	0	0	1	0	
$\{3\}$	0	0	1	0	0	0	0	
$\{1,2\}$	1	0	0	1	1	0	1	
$\{1,3\}$	1	0	0	1	1	0	1	
$\{2,3\}$	0	1	0	0	0	1	0	
$\{1,2,3\}$	1	0	0	1	1	0	1	

3.5. Relaciones de orden

3.5.1   Se omite.

3.5.2   Se omite.

3.5.3   Se omite.

3.5.4   Se omite.

3.5.5   Se omite.

3.5.6   Se omite.

3.5. (*) Diagramas de Hasse

3.5.7   Se omite.

3.5.8   Se omite.

3.5.9   Se omite.

Soluciones del Capítulo 4

4.0.1  

a.) $f(2, 3) = 2 + 3 = 5$

b.)

c.) $f(\{3\} \times \{3\}) = f(3, 3) = 6$

d.)

e.) $f^{-1}(\{4\}) = \{(3, 1), (2, 2), (1, 3)\}$

f.)

4.0.2  

a.) $f(6, 2) = 3$ y $f(3, 1) = 3$

b.)

c.)



d.) $f^{-1}\left(\left\{1, 2, \frac{1}{2}\right\}\right) = \{(3, 3), (4, 2), (6, 3)\}$. Observe que $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \emptyset$

4.0.3  

a.) Ver el ejemplo 4.6

$$\begin{aligned} \text{b.) } b \in f(C) - f(D) &\implies b \in f(C) \wedge b \notin f(D) \\ &\implies \exists c \in C \text{ tal que } f(c) = b \wedge \nexists d \in D \text{ tal que } f(d) = b \\ &\implies \exists c \in C \text{ tal que } f(c) = b \wedge \forall d \in D, f(d) \neq b \\ &\implies \exists c \in C - D \text{ tal que } f(c) = b \\ &\therefore b \in f(C - D) \end{aligned}$$

c.) Como $C - \bar{D} = C \cap D$, aplicamos el resultado anterior: $f(C) - f(\bar{D}) \subseteq f(C - \bar{D}) = f(C \cap D)$

4.0.4   Para demostrar $f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N)$, basta con darnos un elemento que pertenezca a $f^{-1}(M)$ y demostrar que dicho elemento también pertenece a $f^{-1}(N)$. Así:

$$a \in f^{-1}(M) \iff \exists b \in M \text{ tal que } f^{-1}(b) = a$$

Pero como $b \in M \subset N \implies b \in N$, por lo tanto se tiene:

$$\exists b \in N \text{ tal que } f^{-1}(b) = a \iff a \in f^{-1}(N)$$

Por lo tanto $f^{-1}(M) \subseteq f^{-1}(N)$.

4.2. Operaciones con funciones. Composición e inversa

4.2.1  

$$(f \circ g)(x) = x - \sqrt{x-1}, \quad (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

4.2.2  

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = \frac{2(x+1)}{x+3}$$

4.2.3  

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x+2} + 2, \quad (g \circ f)(x) = \frac{1}{x+4}$$

4.2.4  

f es biyectiva y $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$

4.2.5  

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x+2} + 2$$

4.2.6  

Se omite.



4.2.7  

Primero calculamos la función inversa de h . Dado que h es una función polinomial, se cumple que es biyectiva. Por lo que:

$$\begin{aligned} y = h(x) &\iff y = 3x - 4 \\ &\iff y + 4 = 3x \\ &\iff \frac{y+4}{3} = x \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 (h^{-1} \circ g \circ h)(x) &= h^{-1}(g(h(x))) \\
 &= h^{-1}(g(3x - 4)) \\
 &= f^{-1}\left(\frac{3x - 4}{3x - 4 + 4}\right) \\
 &= f^{-1}\left(\frac{3x - 4}{3x}\right) \\
 &= \frac{\frac{3x - 4}{3x} + 4}{3} \\
 &= \frac{15x - 4}{9x}
 \end{aligned}$$

4.2.8   Primero calculamos la función inversa de f . Dado que f es una función polinomial, se cumple que es biyectiva. Por lo que:

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\iff y = ax^3 \\
 &\iff \frac{y}{a} = x^3 \\
 &\iff \sqrt[3]{\frac{y}{a}} = x
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}$. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 (f^{-1} \circ g \circ f)(x) &= f^{-1}(g(f(x))) \\
 &= f^{-1}(g(ax^3)) \\
 &= f^{-1}(2ax^3 + 3) \\
 &= \sqrt[3]{\frac{2ax^3 + 3}{a}}
 \end{aligned}$$

4.2.9   Como g es biyectiva podemos calcular su inversa, así:

$$\begin{aligned}
 y = g(x) &\iff y = \frac{x}{x + 2} \\
 &\iff y(x + 2) = x \\
 &\iff yx + 2y = x \\
 &\iff x(y - 1) = -2y \\
 &\iff x = \frac{-2y}{y - 1} \\
 &\iff x = \frac{2y}{1 - y}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g^{-1}(x) = \frac{2x}{1-x}$. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 (g^{-1} \circ f \circ g)(x) &\iff g^{-1}(f(g(x))) \\
 &\iff g^{-1}\left(f\left(\frac{x}{x+2}\right)\right) \\
 &\iff g^{-1}\left(\frac{x}{x+2} - 1\right) \\
 &\iff \frac{2\left(\frac{x}{x+2} - 1\right)}{1 - \left(\frac{x}{x+2} - 1\right)} \\
 &\iff \frac{\frac{2x - 2x - 4}{x+2}}{2 - \frac{x}{x+2}} \\
 &\iff \frac{\frac{-4}{x+2}}{\frac{2x+4-x}{x+2}} \\
 &\iff \frac{-4}{x+4}
 \end{aligned}$$

4.2.10

1) Para probar que f es biyectiva, debemos probar que f es inyectiva y sobreyectiva. Así:

- **Inyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall a, b \in [1, +\infty]) [f(a) = f(b) \implies a = b]$. Así sean $a, b \in [1, +\infty]$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 f(a) = f(b) &\implies \frac{a^2 + 2}{a^2} = \frac{b^2 + 2}{b^2} \\
 &\implies b^2(a^2 + 2) = a^2(b^2 + 2) \\
 &\implies a^2b^2 + 2b^2 = a^2b^2 + 2a^2 \\
 &\implies 2b^2 = 2a^2 \\
 &\implies a = b
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

- **Sobreyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall b \in (1, 3])(\exists a \in [1, +\infty]) [b = f(a)]$.

Así sea $b \in (1, 3]$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 b = f(a) &\implies b = \frac{a^2 + 2}{a^2} \\
 &\implies ba^2 = a^2 + 2 \\
 &\implies a^2(b - 1) = 2 \\
 &\implies a^2 = \frac{2}{b - 1} \\
 &\implies a = \pm \sqrt{\frac{2}{b - 1}}
 \end{aligned}$$

Como sabemos que $a \in [1, +\infty]$, tomamos $a = \sqrt{\frac{2}{b - 1}}$. Así se cumple todas las imágenes de f tienen una preimagen, por lo que se concluye que f es sobreyectiva.

2) Dado que f es biyectiva podemos calcular su inversa. Así:

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\iff y = \frac{x^2 + 2}{x^2} \\
 &\iff yx^2 = x^2 + 2 \\
 &\iff x^2(y - 1) = 2 \\
 &\iff x^2 = \frac{2}{y - 1} \\
 &\iff x = \pm \sqrt{\frac{2}{y - 1}}
 \end{aligned}$$

Como sabemos que $x \in [1, +\infty]$, tomamos $x = \sqrt{\frac{2}{y - 1}}$. Por lo tanto $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{x - 1}}$.

4.2.11

1) Se debe mostrar que $(\forall a, b \in \mathbb{R}) [g(a) = g(b) \implies a = b]$. Así sean $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 g(a) = g(b) &\implies f(a) + k = f(b) + k; \text{ con algún } k \in \mathbb{Z} \\
 &\implies f(a) = f(b) \\
 &\implies a = b; \text{ pues } f \text{ es inyectiva}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, g es inyectiva.

2) Se debe mostrar que $(\forall b_2 \in \mathbb{R})(\exists a_2 \in \mathbb{R}) [b_2 = g(a_2)]$.

Además por hipótesis f es sobreyectiva, por lo que $(\forall b_1 \in \mathbb{R})(\exists a_1 \in \mathbb{R}) [b_1 = f(a_1)]$

Así sea $b \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 b = g(a) &\implies b_2 = f(a_2) + k; \text{ con algún } k \in \mathbb{Z} \\
 &\implies b_2 = b_1 + k \text{ por hipótesis} \\
 &\implies b_1 = b_2 - k
 \end{aligned}$$

Por lo que bastan tomar $a_2 = b_1 = f(a_1)$ por lo tanto g es sobreyectiva.

3) Dado que g es biyectiva podemos calcular su inversa. Así:

$$\begin{aligned}
 y = g(x) &\iff y = f(x) + k \\
 &\iff y - k = f(x) \\
 &\iff f^{-1}(y - k) = x
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g^{-1}(x) = f^{-1}(x - k)$.

4.2.12   Para probar que f es biyectiva, debemos probar que f es inyectiva y sobreyectiva. Así:

- **Inyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall a, b \in \mathbb{R} - \{-2\}) [f(a) = f(b) \implies a = b]$. Así sean $a, b \in \mathbb{R} - \{-2\}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 f(a) = f(b) &\implies \frac{2a}{3a+6} = \frac{2b}{3b+6} \\
 &\implies 2a(3b+6) = 2b(3a+6) \\
 &\implies 6ab + 12a = 6ab + 12b \\
 &\implies 12a = 12b \\
 &\implies a = b
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

- **Sobreyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall b \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}) (\exists a \in \mathbb{R} - \{-2\}) [b = f(a)]$.

Así sea $b \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 b = f(a) &\implies b = \frac{2a}{3a+6} \\
 &\implies b(3a+6) = 2a \\
 &\implies 3ab + 6b = 2a \\
 &\implies a(3b-2) = -6 \\
 &\implies a = \frac{-6}{3b-2} \\
 &\implies a = \frac{6}{2-3b}
 \end{aligned}$$

Dado que $b \in \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}$, entonces se cumple $a \in \mathbb{R} - \{-2\}$, por lo tanto todas las imágenes de f tienen una preimagen, así concluimos que f es sobreyectiva.

4.2.13

1) Se debe mostrar que $(\forall a, b \in \mathbb{R} - \{1\}) [f(a) = f(b) \implies a = b]$. Así sean $a, b \in \mathbb{R} - \{1\}$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies \frac{2a+3}{a-1} = \frac{2b+3}{b-1} \\ &\implies (2a+3)(b-1) = (2b+3)(a-1) \\ &\implies 2ab - 2a + 3b - 3 = 2ab - 2b + 3a - 3 \\ &\implies -2a + 3b = -2b + 3a \\ &\implies -5a = -5b \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

2) Para que f sea sobreyectiva, se debe cumplir que $(\forall b \in \mathbb{R} - \{k\}) (\exists a \in \mathbb{R} - \{1\}) [b = f(a)]$.

Así sea $b \in \mathbb{R} - \{k\}$ se debe dar que:

$$\begin{aligned} b = f(a) &\implies b = \frac{2a+3}{a-1} \\ &\implies b(a-1) = 2a+3 \\ &\implies ba - b = 2a+3 \\ &\implies a(b-2) = 3+b \\ &\implies a = \frac{3+b}{b-2} \end{aligned}$$

Dado que $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, entonces debe darse que $b \in \mathbb{R} - \{2\}$, por lo tanto $k = 2$.

4.2.14

Dado que f es biyectiva podemos calcular su inversa. Así:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = -2x^2 + 5 \\ &\iff 2x^2 = 5 - y \\ &\iff x^2 = \frac{5-y}{2} \\ &\iff x = \pm \sqrt{\frac{5-y}{2}} \end{aligned}$$

Como sabemos que $x \in]-\infty, 0]$, tomamos $x = -\sqrt{\frac{5-y}{2}}$. Por lo tanto $f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{5-x}{2}}$

4.2.15

1) Para probar que f es biyectiva, debemos probar que f es inyectiva y sobreyectiva. Así:

- **Inyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall a, b \in \mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}) [f(a) = f(b) \implies a = b]$. Así sean $a, b \in \mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\implies \frac{3a-7}{9a+6} = \frac{3b-7}{9b+6} \\ &\implies (3a-7)(9b+6) = (3b-7)(9a+6) \\ &\implies 27ab + 18a - 63b - 42 = 27ab + 18b - 63a - 42 \\ &\implies 81a = 81b \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

- **Sobreyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall b \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}) (\exists a \in \mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}) [b = f(a)]$.

Así sea $b \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$ se tiene:

$$\begin{aligned} b = f(a) &\implies b = \frac{3a-7}{9a+6} \\ &\implies b(9a+6) = 3a-7 \\ &\implies 9ab + 6b = 3a-7 \\ &\implies a(9b-3) = -6b-7 \\ &\implies a = \frac{-6b-7}{9b-3} \end{aligned}$$

Dado que $b \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$, entonces se cumple $a \in \mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}$, por lo tanto todas las imágenes de f tienen una preimagen, así concluimos que f es sobreyectiva.


2) Primero determinemos $f^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{3x-7}{9x+6} \\ &\iff y(9x+6) = 3x-7 \\ &\iff 9xy + 6y = 3x-7 \\ &\iff x = \frac{-7-6y}{9y-3} \\ &\iff f^{-1}(x) = \frac{-7-6x}{9x-3} \end{aligned}$$

Ahora encontremos: $(f \circ f)(x)$

$$\begin{aligned}
 (f \circ f)(x) &\iff f(f(x)) \\
 &\iff f\left(\frac{3x-7}{9x+6}\right) \\
 &\iff \frac{3\left(\frac{3x-7}{9x+6}\right) - 7}{9\left(\frac{3x-7}{9x+6}\right) + 6} \\
 &\iff \frac{9x - 21 - 63x - 42}{9x + 6} \\
 &\iff \frac{27x - 63 + 54x + 36}{9x + 6} \\
 &\iff \frac{-7 - 6x}{9x - 3}
 \end{aligned}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = (f \circ f)(x)$$


4.2.16  Como se pide que f sea lineal, se cumple que $\exists m, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = mx + b$. Así tenemos que:

$$\begin{aligned}
 (f \circ f \circ f)(x) &\implies f(f(f(x))) \\
 &\implies f(f(mx + b)) \\
 &\implies f(m(mx + b) + b) \\
 &\implies f(m^2x + bm + b) \\
 &\implies m(m^2x + bm + b) + b \\
 &\implies m^3x + bm^2 + bm + b
 \end{aligned}$$

Dado que debe darse $m^3x + bm^2 + bm + b = -8x + 5$, se debe cumplir que:

$$\begin{cases} m^3 &= -8 \\ bm^2 + bm + b &= 5 \end{cases} \implies \begin{cases} m &= -2 \\ b &= \frac{5}{3} \end{cases}$$

Así la única función lineal que cumple $(f \circ f \circ f)(x) = -8x + 5$ es $f = -2x + \frac{5}{3}$

4.2.17  Primero calculamos la función inversa de f . Dado que f es una función polinomial, se cumple que es biyectiva. Por lo que:

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\iff y = 3x - 1 \\
 &\iff y + 1 = 3x \\
 &\iff \frac{y + 1}{3} = x
 \end{aligned}$$



Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 (f^{-1} \circ g \circ f)(x) &= f^{-1}(g(f(x))) \\
 &= f^{-1}(g(3x-1)) \\
 &= f^{-1}(4-2(3x-1)) \\
 &= f^{-1}(6-6x) \\
 &= \frac{6-6x+1}{3} \\
 &= \frac{7-6x}{3}
 \end{aligned}$$

Ahora corresponde calcular la inversa de la función anterior, así:

$$\begin{aligned}
 y = f^{-1}(g(f(x))) &\iff y = \frac{7-6x}{3} \\
 &\iff 3y = 7-6x \\
 &\iff 6x = 7-3y \\
 &\iff x = \frac{7-3y}{6}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(g(f(x))) = \frac{7-3x}{6}$

4.2.18   Primero calculamos la función inversa de h . Dado que h es una función polinomial, se cumple que es biyectiva. Por lo que:

$$\begin{aligned}
 y = h(w) &\iff y = 3-5w \\
 &\iff 5w = 3-y \\
 &\iff w = \frac{3-y}{5}
 \end{aligned}$$



Por lo tanto, $h^{-1}(w) = \frac{3-w}{5}$. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 (h \circ g \circ h^{-1})(x) &= h(g(h^{-1}(x))) \\
 &= h\left(g\left(\frac{3-x}{5}\right)\right) \\
 &= h\left(2\left(\frac{3-x}{5}\right)+3\right) \\
 &= h\left(\frac{21-2x}{5}\right) \\
 &= 3-5\left(\frac{21-2x}{5}\right) \\
 &= 2x-18
 \end{aligned}$$

Ahora corresponde calcular la inversa de la función anterior, así:

$$\begin{aligned} y = h(g(h^{-1}(x))) &\iff y = 2x - 18 \\ &\iff y + 18 = 2x \\ &\iff \frac{y + 18}{2} = x \end{aligned}$$

Por lo tanto, $h(g(h^{-1}(x))) = \frac{x + 18}{2}$.

4.2.19   Primero calculamos la función inversa de g . Dado que g es una función polinomial, se cumple que es biyectiva. Por lo que:

$$\begin{aligned} y = g(x) &\iff y = 2x - 1 \\ &\iff y + 1 = 2x \\ &\iff \frac{y + 1}{2} = x \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$. Así tenemos:

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ h \circ h)(x) &= g^{-1}(h(h(x))) \\ &= g^{-1}\left(h\left(\frac{2}{x-4}\right)\right) \\ &= g^{-1}\left(\frac{x-4}{9-2x}\right) \\ &= \frac{\frac{x-4}{9-2x} + 1}{2} \\ &= \frac{x-5}{4x-18} \end{aligned}$$


4.2.20   Dado que g es biyectiva podemos calcular su inversa. Así:

$$\begin{aligned} y = g(x) &\iff y = \frac{x-3}{x-2} \\ &\iff y(x-2) = x-3 \\ &\iff yx - 2y = x-3 \\ &\iff x(y-1) = 2y-3 \\ &\iff x = \frac{2y-3}{y-1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g^{-1}(x) = \frac{2x-3}{x-1}$. Así tenemos:

$$\begin{aligned}(f \circ g^{-1})(x) &= f(g^{-1}(x)) \\ &= f\left(\frac{2x-3}{x-1}\right) \\ &= \frac{1}{\frac{2x-3}{x-1} + 2} \\ &= \frac{x-4}{9-2x} + 1 \\ &= \frac{x-1}{4x-5}\end{aligned}$$

Así tenemos $f \circ g^{-1}(x) = \frac{x-1}{4x-5}$ y su dominio viene dado por $\mathcal{R} - \left\{\frac{5}{4}\right\}$.

4.2.21  Como $(2, 5) \in G_f$ se cumple que $(5, 2) \in G_{f^{-1}}$. Así se tiene que:

$$\begin{aligned}f^{-1}(5) = 2 &\iff 5 = \frac{k+4}{k-2} \\ &\iff 5(k-2) = k+4 \\ &\iff 10k-2 = k+4 \\ &\iff 9k = 6 \\ &\iff k = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

4.2.22 

1)

Para probar que f es biyectiva, debemos probar que f es inyectiva y sobreyectiva. Así:

- **Inyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall a, b \in \mathbb{R}) [f(a) = f(b) \implies a = b]$. Así sean $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned}f(a) = f(b) &\implies a^3 + 2 = b^3 + 2 \\ &\implies a^3 = b^3 \\ &\implies a = b\end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

- **Sobreyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall b \in \mathbb{R})(\exists a \in \mathbb{R}) [b = f(a)]$.

Así sea $b \in \mathbb{R}$ se tiene:



$$\begin{aligned}
 b = f(a) &\implies b = a^3 + 2 \\
 &\implies b - 2 = a^3 \\
 &\implies \sqrt[3]{b - 2} = a
 \end{aligned}$$

Dado que $b \in \mathbb{R}$, entonces se cumple $a \in \mathbb{R}$, por lo tanto todas las imágenes de f tienen una preimagen, así concluimos que f es sobreyectiva.

2) Dado que f es biyectiva podemos calcular su inversa. Así:

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\iff y = x^3 + 2 \\
 &\iff y - 2 = x^3 \\
 &\iff \sqrt[3]{y - 2} = x
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$.

4.2.23   Iniciemos con $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$, podemos notar que dicha función solamente tiene una restricción en $x = -1$, por lo que su dominio debe ser $\mathbb{R} - \{-1\}$. Ahora para calcular su ámbito, basta con calcular el dominio de su función inversa, así:

$$\begin{aligned}
 y = f(x) &\iff y = \frac{x+2}{x+1} \\
 &\iff y(x+1) = x+2 \\
 &\iff yx + y = x+2 \\
 &\iff x(y-1) = 2-y \\
 &\iff x = \frac{2-y}{y-1}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el ámbito de f debe ser $\mathbb{R} - \{1\}$.

Ahora como g es una función polinómica sin restricciones, su dominio y su ámbito serán \mathbb{R} . Para calcular su inversa tenemos:

$$\begin{aligned}
 y = g(x) &\iff y = 2x - 1 \\
 &\iff y + 1 = 2x \\
 &\iff x = \frac{y+1}{2}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g^{-1}(x) = \frac{y+1}{2}$.

Finalmente para calcular $(g^{-1} \circ f)(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 (g^{-1} \circ f)(x) &\iff g^{-1}(f(x)) \\
 &\iff g^{-1}\left(\frac{x+2}{x+1}\right) \\
 &\iff \frac{\frac{x+2}{x+1} + 1}{2} \\
 &\iff \frac{2x+3}{2x+2}
 \end{aligned}$$

4.2.24  

1)

Para probar que f es biyectiva, debemos probar que f es inyectiva y sobreyectiva. Así:

- **Inyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall a, b \in]-\infty, 1]) [f(a) = f(b) \implies a = b]$. Así sean $a, b \in]-\infty, 1]$ se tiene:

$$\begin{aligned}
 f(a) = f(b) &\implies (a-1)^2 + 2 = (b-1)^2 + 2 \\
 &\implies (a-1)^2 = (b-1)^2 \\
 &\implies |a-1| = |b-1| \\
 &\implies -(a-1) = -(b-1) \text{ pues } a, b \in]-\infty, 1] \\
 &\implies a = b
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

- **Sobreyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall b \in [2, +\infty))(\exists a \in]-\infty, 1]) [b = f(a)]$.

2) Se omite.

4.2.25  

1) Primeramente, es necesario determinar el dominio de la función.

- $\mathcal{D}_f = \{(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (6,1), (6,2), (6,3)\}$

Observe que $f(4,2) = f(6,3) = 2$, por lo tanto, **No** es inyectiva

2) 9

3)

No es sobreyectiva, pues, por ejemplo, para $y = 4.2$, no existe (a, b) tal que $f(a, b) = 4.2$

$$4) \quad C = \{(3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$$

$$5) \quad (4, 2), (6, 3), (3, 1), (6, 2)$$

4.2.26

1) Tenemos que $f : P(B) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$, donde $P(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}, \{1, 3, 9\}\}$.

Como que $f(X) = |X|$, tenemos que:

- $f(\emptyset) = |\emptyset| = 0.$
- $f(\{1\}) = |\{1\}| = 1.$
- $f(\{3\}) = |\{3\}| = 1.$
- $f(\{9\}) = |\{9\}| = 1.$
- $f(\{1, 3\}) = |\{1, 3\}| = 2.$
- $f(\{1, 9\}) = |\{1, 9\}| = 2.$
- $f(\{3, 9\}) = |\{3, 9\}| = 2.$
- $f(\{1, 3, 9\}) = |\{1, 3, 9\}| = 3.$

Note que a varias preimágenes les corresponde una misma imagen, por lo tanto f **no** es inyectiva.

Además $f(P(B)) = \{0, 1, 2, 3\} \neq \{0, 1, 2, 3, 4\}$, por lo tanto f **no** es sobreyectiva.

2) Tenemos que $g : A \times B \rightarrow \{3, 4\}$, donde $A \times B = \{(8, 1), (8, 3), (8, 9)\}$, tenemos:

- $g(\{(8, 1)\}) = 4$
- $g(\{(8, 3)\}) = 4$
- $g(\{(8, 9)\}) = 3$

Note que $g(\{(8, 1)\})$ y $g(\{(8, 3)\})$ les corresponde una misma imagen (4), por lo tanto g **no** es inyectiva.

Además $f(A \times B) = \{3, 4\}$, como dicho conjunto es igual al codominio se verifica que g es sobreyectiva.

3) Debemos buscar todas las preimágenes cuyo resultado sea 2, o sea todos los subconjuntos de $P(B)$ cuya cardinalidad es 2. Así:

$$f^{-1}(\{2\}) = \{\{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}\}$$

4) Tenemos que $g(\{(8, 1)\}) = 4$. Luego debemos calcular $g^{-1}(\{4\})$, o sea debemos encontrar todos los pares de $(a, b) \in A \times B$ tal que $a > b$. En este caso sólo cumple cuando se tiene el par $(8, 9)$, así:

$$g^{-1}(g(\{(8, 1)\})) = g^{-1}(\{4\}) = \{(8, 9)\}$$

4.2.27

1) Tenemos que:

- $f(0) = 1.$
- $f(1) = 2.$
- $f(2) = 1.$
- $f(3) = 2.$
- $f(4) = 3.$
- $f(5) = 4.$

Note que a varias preimágenes les corresponde una misma imagen, por lo tanto f **no** es inyectiva.

2) Tomando como base las imágenes calculadas en el punto anterior, tenemos que el ámbito de f corresponde a $\{1, 2, 3, 4\} \neq A$, por lo tanto f **no** es sobreyectiva.

3) Tenemos:

- $f(0) = 3.$
- $f(3) = 6.$
- $f(6)$ no existe, pues el 6 no es elemento de A

Por lo tanto, $f(\{0, 3, 6\}) = \{1, 2\}$

4) Tenemos:

- $f(2) = 1.$
- $f(4) = 3.$
- $f(5) = 4$ no existe, pues el 6 no es elemento de A

Por lo tanto, $f(\{2, 4, 5\}) = \{1, 3, 4\}$

5) Para determinar $f^{-1}(\{3, 5\})$ y $f^{-1}(f(\{4\}))$ debemos buscar todas las preimágenes cuyo resultado sea $\{3, 5\}$ y $\{4\}$. Tomando como base las imágenes calculadas en el punto (a), tenemos:

$$f^{-1}(\{3\}) = 4$$

$$f^{-1}(\{5\}) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{4\}) = 5$$

Así tenemos:

$$f^{-1}(\{3, 5\}) \cup f^{-1}(f(\{4\})) = \{4, 5\}$$

.

4.2.28

1) Debemos determinar el dominio de f

- $\mathcal{D}_f = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

a.) f es inyectiva.

Tenemos que:

- $f(1,1) = 2.$
- $f(1,2) = 3.$
- $f(1,3) = 4.$
- $f(2,1) = 1.$
- $f(2,2) = 2.$
- $f(2,3) = 5.$
- $f(3,1) = 2.$
- $f(3,2) = 1.$
- $f(3,3) = 2.$

Note que a varias preimágenes les corresponde una misma imagen, por lo tanto f **no** es inyectiva.

b.) f es sobreyectiva.

Tomando como base las imágenes calculadas en el punto anterior, tenemos que el ámbito de f corresponde a $\{1, 2, 3, 4, 5\} \neq B$, por lo tanto f **no** es sobreyectiva.

2) Para determinar $f^{-1}(\{2, 7\})$ debemos buscar todas las preimágenes cuyo resultado sea $\{2, 7\}$. Tomando como base las imágenes calculadas en el punto (a), tenemos:

$$f^{-1}(\{2\}) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$f^{-1}(\{7\}) = \emptyset$$

$$3) \quad f^{-1}(f(\{(2, 2)\})) = f^{-1}(2) = \{(1, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$$

4.2.29

1) Debemos determinar el dominio de f

$$\bullet \quad D_f = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4)\}$$

a.) f es inyectiva.

Tenemos que:

- $f(2,1) = 1.$
- $f(2,2) = 4.$
- $f(2,3) = 4.$
- $f(2,4) = 4.$
- $f(3,1) = 1.$
- $f(3,2) = 2.$
- $f(3,3) = 6.$
- $f(3,4) = 6.$
- $f(5,1) = 1.$
- $f(5,2) = 2.$
- $f(5,3) = 3.$
- $f(5,4) = 4.$

Note que a varias preimágenes les corresponde una misma imagen, por lo tanto f **no** es inyectiva.

b.) f es sobreyectiva.

Tomando como base las imágenes calculadas en el punto anterior, tenemos que el ámbito de f corresponde a $\{1, 2, 3, 4, 6\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, por lo tanto f **no** es sobreyectiva.

2) Para determinar $f^{-1}(\{1, 3, 5\})$, $f^{-1}(\{7\})$, $f(f^{-1}(\{4\}))$ debemos buscar todas las preimágenes cuyo resultado sea $\{1, 3, 5\}$, $\{y\}$ y $\{4\}$. Tomando como base las imágenes calculadas en el punto (a), tenemos:

$$f^{-1}(\{1, 3, 5\}) = \{(2, 1), (3, 1), (5, 1), (5, 3)\}$$

$$f^{-1}(\{7\}) = \emptyset$$

$$f^{-1}(\{4\}) = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (5, 4)\}$$

3) Calculemos primero C:

$$C = \{(2, 4), (3, 3), (5, 1)\}, \text{ luego } f(C) = \{4, 6, 1\}.$$

$$\text{Así, } f^{-1}(f(C)) = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (5, 1)\}$$

$$4) \quad f(2, f(2, 2)) = f(2, 4) = 4$$

4.2.30

1) Tenemos que $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4\}$, donde $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Como que $f(B) = |B|$, tenemos que:

- $f(\emptyset) = |\emptyset| = 0.$
- $f(\{a\}) = |\{a\}| = 1.$
- $f(\{b\}) = |\{b\}| = 1.$
- $f(\{c\}) = |\{c\}| = 1.$
- $f(\{a, b\}) = |\{a, b\}| = 2.$
- $f(\{a, c\}) = |\{a, c\}| = 2.$
- $f(\{b, c\}) = |\{b, c\}| = 2.$
- $f(\{a, b, c\}) = |\{a, b, c\}| = 3.$

Note que a varias preimágenes les corresponde una misma imagen, por lo tanto f **no** es inyectiva.

Además $f(\mathcal{P}(B)) = \{0, 1, 2, 3\} \neq \{0, 1, 2, 3, 4\}$, por lo tanto f **no** es sobreyectiva.

2)

$$a.) \quad f(\{\{a\}, \{a, b\}, \{b\}\}) = \{1, 3\}$$

$$b.) \quad \text{Note que } f^{-1}(\{4\}) = \emptyset, \text{ por lo tanto, } f(\emptyset) = 0$$

$$c.) \quad \text{Note que } f(\{b\}) = 1, \text{ por lo tanto } f^{-1}(1) = \{a, b, c\}$$

4.2.31

1) Primero vamos a calcular los gráficos de cada una de las funciones. Como:

$$f : \mathcal{P}(A) \rightarrow B \quad \text{y} \quad \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Se cumple:

- $f(\emptyset) = |\emptyset| = 0.$
- $f(\{a\}) = |\{a\}| = 1.$
- $f(\{b\}) = |\{b\}| = 1.$
- $f(\{c\}) = |\{c\}| = 1.$
- $f(\{a, b\}) = |\{a, b\}| = 2.$
- $f(\{a, c\}) = |\{a, c\}| = 2.$
- $f(\{b, c\}) = |\{b, c\}| = 2.$
- $f(\{a, b, c\}) = |\{a, b, c\}| = 3.$

Por lo que tenemos $G_f = \{(\emptyset, 0), (\{a\}, 1), (\{b\}, 1), (\{c\}, 1), (\{a, b\}, 2), (\{a, c\}, 2), (\{b, c\}, 2), (\{a, b, c\}, 3)\}.$
También tenemos:

- $g(0) = 1.$
- $g(1) = 2.$
- $g(2) = 3.$
- $g(3) = 1.$
- $g(4) = 2.$

Por lo que tenemos $G_g = \{(0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 2)\}.$ Finalmente tenemos que:

$$G_{g \circ f} = \{(\emptyset, 1), (\{a\}, 2), (\{b\}, 2), (\{c\}, 2), (\{a, b\}, 3), (\{a, c\}, 3), (\{b, c\}, 3), (\{a, b, c\}, 1)\}$$

Note que a varias preimágenes les corresponde una misma imagen, por lo tanto $g \circ f$ **no** es inyectiva. Además el ámbito de $g \circ f$ corresponde a $\{1, 2, 3\}$ y como dicho conjunto es igual al codominio se verifica que $g \circ f$ es sobreyectiva.

2) Debemos buscar todas las preimágenes cuyo resultado sea 2 o 3, o sea todos los subconjuntos de $P(A)$ cuya cardinalidad es 2 o 3. Así:

$$f^{-1}(\{2, 3\}) = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

3) Debemos buscar todas las preimágenes de $g \circ f$ cuyo resultado sea 2 o 3. Tomando como base los resultados obtenidos en la parte (a) tenemos:

$$(g \circ f)^{-1}(\{2, 3\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$$

4.2.32

1) Tenemos que:

- $f(0) = 3.$
- $f(1) = 4.$
- $f(2) = 5.$
- $f(3) = 6.$
- $f(4) = 1.$
- $f(5) = 2.$
- $f(6) = 3.$

Note que a varias preimágenes les corresponde una misma imagen, por lo tanto f **no** es inyectiva.

2) Tomando como base las imágenes calculadas en el punto anterior, tenemos que el ámbito de f corresponde a $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \neq A$, por lo tanto f **no** es sobreyectiva.

3) Tenemos:

- $f(0) = 3$.
- $f(3) = 6$.
- $f(6) = 3$.

Por lo tanto, $f(\{0, 3, 6\}) = \{3, 6\}$

4) Para determinar $f^{-1}(\{0\})$, debemos buscar todas las preimágenes cuyo resultado sea 0. Tomando como base las imágenes calculadas en el punto (a), tenemos:

$$f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$$

Ahora, como $f(\{6\}) = 3$ debemos determinar $f^{-1}(\{3\})$ o sea, todas las preimágenes cuyo resultado sea 3. Así tenemos:

$$f^{-1}(\{3\}) = \{0, 6\}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(f(\{6\})) = \{0, 6\}$

4.2.33   Tenemos:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x \cdot y) &\implies g(f(x \cdot y)) \\ &\implies g(f(x) + f(y)) \\ &\implies f^{-1}(f(x)) + f^{-1}(f(y)) \\ &\implies x + y \quad \text{propiedad de la función inversa} \end{aligned}$$

4.2.34  

1) Tenemos que $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow B$, donde $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}, \{1, 3, 9\}\}$. Por lo que tenemos:

- $f(\emptyset) = |\emptyset| = 0$.
- $f(\{1\}) = 1$.
- $f(\{3\}) = 3$.
- $f(\{9\}) = 9$.
- $f(\{1, 3\}) = 1$.
- $f(\{1, 9\}) = 1$.
- $f(\{3, 9\}) = 3$.
- $f(\{1, 3, 9\}) = 1$.

Note que a varias preimágenes les corresponde una misma imagen, por lo tanto f **no** es inyectiva.

Además $f(\mathcal{P}(A)) = \{0, 1, 3, 9\} = B$, por lo tanto f es sobreyectiva.

2) Tenemos que $C = \{\{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}\}$, pues son los subconjuntos de $\mathcal{P}(A)$ cuya cardinalidad es 2. Así se debe calcular $f(\{\{1, 3\}, \{1, 9\}, \{3, 9\}\})$, tomando como base las imágenes calculadas en el punto (a), tenemos:

$$f(C) = \{1, 3\}$$

3) Para determinar $f^{-1}(\{0,3\})$, debemos buscar todas las preimágenes cuyo resultado sea 0 o 3. Tomando como base las imágenes calculadas en el punto (a), tenemos:

$$f^{-1}(\{0,3\}) = \{\emptyset, \{3\}, \{3,9\}\}$$

4.2.35

1) Tenemos que $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow B$, donde $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$. Por lo que tenemos:

- $f(\emptyset) = |\emptyset| = 0.$
- $f(\{1\}) = 1.$
- $f(\{2\}) = 2.$
- $f(\{3\}) = 3.$
- $f(\{1,2\}) = 3.$
- $f(\{1,3\}) = 4.$
- $f(\{2,3\}) = 5.$
- $f(\{1,2,3\}) = 6.$

Note que a varias preimágenes les corresponde una misma imagen, por lo tanto f **no** es inyectiva.

Además $f(\mathcal{P}(A)) = \{0,1,2,3,4,5,6\} = B$, por lo tanto f es sobreyectiva.

2) Tenemos que $C = \{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$, pues son los subconjuntos de $\mathcal{P}(A)$ que contienen al elemento 2. Así se debe calcular $f(\{\{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\})$, tomando como base las imágenes calculadas en el punto (a), tenemos:

$$f(C) = \{2,3,5,6\}$$

3) Para determinar $f^{-1}(\{0,3\})$, debemos buscar todas las preimágenes cuyo resultado sea 0 o 3. Tomando como base las imágenes calculadas en el punto (a), tenemos:

$$f^{-1}(\{0,3\}) = \{\emptyset, \{3\}, \{1,2\}\}$$

4.2.36 Tenemos por hipótesis:



H1. $g \circ f : A \rightarrow C$ es inyectiva, osea, $(\forall a_1, b_1 \in A) [g(f(a_1)) = g(f(b_1)) \implies a_1 = b_1]$.

H2. $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva, osea, $(\forall b_2 \in B) (\exists a_2 \in A) [b_2 = f(a_2)]$.

Y se debe demostrar que $g : B \rightarrow C$ es inyectiva, osea, $(\forall a, b \in B) [g(a) = g(b) \implies a = b]$. Así sean $a, b \in B$ se tiene:

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) &\implies g(f(x)) = g(f(y)) \quad \text{pues } a, b \in B \text{ y } f \text{ es sobreyectiva} \\ &\implies x = y \quad \text{pues } g \circ f \text{ es inyectiva} \end{aligned}$$



Así concluimos que g es inyectiva.

4.2.37   Se sabe que $(f \circ g)(x) = 35 - 8x$ o sea $f(g(x)) = 35 - 8x$, por lo que debe darse que $g(x) = f^{-1}(35 - 8x)$. Así como $f(x) = 8x^3 - 5$ y es biyectiva por ser una función polinómica, tenemos:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = 8x^3 - 5 \\ &\iff y + 5 = 8x^3 \\ &\iff \frac{y + 5}{8} = x^3 \\ &\iff \sqrt[3]{\frac{y + 5}{8}} = x \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 5}{8}}$, así:

$$g(x) = f^{-1}(35 - 8x) = \sqrt[3]{\frac{40 - 8x}{8}}$$

4.2.38   **Inyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall a, b \in \mathbb{R}) [g(a) = g(b) \implies a = b]$. Así sean $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) &\implies 2f(5a) + 3 = 2f(5b) + 3 \\ &\implies f(5a) = f(5b) \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

Por lo tanto, g es inyectiva.

4.2.39   Verificación:

a.) Inyectiva: $f(x) = f(y) \implies \frac{3x + 1}{x - 2} = \frac{3y + 1}{y - 2} \implies 3xy + y - x - 2 = 3xy + x - 6y - 2 \implies x = y$.

b.) Sobreyectiva: Si $y = \frac{3x + 1}{x - 2} \implies x = \frac{2y + 1}{y - 3}$, es decir, $\forall y \in \mathbb{R} - \{3\}$ hay una preimagen $x = \frac{2y + 1}{y - 3}$, por lo tanto la función es sobreyectiva.

c.) Como f es biyectiva, se tiene que $f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$.

4.2.40   Se omite.

4.2.41   Se omite.

4.2.42   Inyectividad: Observe que si $a, b \in [-1, \infty[$ entonces

$$a^2 + 2a - 1 = b^2 + 2b - 1 \implies (a - b)(a + b + 2) = 0 \implies a = b \text{ o } b = -2 - a.$$

Ahora, ¿puede ocurrir la opción $b = -2 - a$? Veamos,



$$a \leq -1 \implies -2 - a \leq -1 \implies b \leq -1 \text{ pero } b \geq -1, \text{ entonces el caso } b = -2 - a \text{ solo puede ocurrir si } b = -2 - a = -1, \text{ es decir, si } a = b = -1.$$

Por lo tanto: Si $a, b \in [-1, \infty[$ entonces $a^2 + 2a - 1 = b^2 + 2b - 1$ si y solo si $a = b$.

El estudiante debe completar el ejercicio.

4.2.43   Se omite.

4.2. Demostración de afirmaciones.

4.2.44   Por hipótesis sabemos que $g \circ f$ es inyectiva y f es sobreyectiva, se debe probar que g es inyectiva.

Así, $\forall a, b \in B$, si $g(a) = g(b)$ entonces $a = b$. Como f es sobreyectiva, existen x y y en A tales que $f(x) = a$ y $f(y) = b$, por lo que tenemos:

$$\begin{aligned} g(a) = g(b) &\implies g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\implies (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \\ &\implies x = y \\ &\implies a = f(x) = f(y) = b \end{aligned}$$

$\therefore g$ es inyectiva

4.2.45   Para probar que f es biyectiva, debemos probar que f es inyectiva y sobreyectiva. Así:

- **Inyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall a, b \in C) [(g^{-1} \circ f)(a) = (g^{-1} \circ f)(b) \implies a = b]$. Así sean $a, b \in C$ se tiene:

$$\begin{aligned} (g^{-1} \circ f)(a) = (g^{-1} \circ f)(b) &\implies g^{-1}(f(a)) = g^{-1}(f(b)), \text{ } g \text{ es biyectiva, } g^{-1} \text{ es inyectiva} \\ &\implies f(a) = f(b) \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g^{-1} \circ f$ es inyectiva.

- **Sobreyectividad:** Se debe mostrar que $(\forall b \in C)(\exists a \in \mathbb{A}) [b = (g^{-1} \circ f)(a)]$.

4.2.46   Se omite.

4.2.47   Se omite.

4.2.48   Se omite.

4.2.49   Se omite.

Soluciones del Capítulo 5

5.0. Principio de Inducción

5.0.1

- 1) • Se demuestra para $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^1 i^2 \stackrel{?}{=} \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$$

$$1^1 \stackrel{?}{=} \frac{6}{6}$$

$$1 \stackrel{\checkmark}{=} 1$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$\text{H.q.d.: } \sum_{i=1}^{n+1} i^2 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6}$$

Simplificamos primero el lado derecho.

$$\begin{aligned} \frac{(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]}{6} &= \frac{(+1)[n+2][2n+3]}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Dado que ya está factorizado, no hace falta expandir el producto. Ahora trabajamos con el lado izquierdo. Para esto separando el último término de la suma. Llegamos hasta n , y el último término

corresponde a sustituir la i por $n + 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 \\ &\stackrel{\text{H.I.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right] \\ &= (n+1) \left[\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \right] \\ &= (n+1) \left[\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \right] \\ &= (n+1) \left[\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right] \\ &= (n+1) \left[\frac{(n+2)(2n+3)}{6} \right] \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

- 2) • Se demuestra para $n = 1$. Note que del lado izquierdo, si $n = 1$, observamos que el último término es $2/3^1$, que es justamente el primero. Así del lado izquierdo tenemos solamente un término:

$$\frac{2}{3} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{3^1} \implies \frac{2}{3} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{2}{3}$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{3^n} = 1 - \frac{1}{3^n}, \quad n \geq 1.$$

$$\text{H.q.d.: } \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{1}{3^{n+1}}.$$

Trabajando con el lado izquierdo, se tiene:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \cdots + \frac{2}{3^n}}_{\text{H.I.}} + \frac{2}{3^{n+1}} &\stackrel{\text{H.I.}}{=} 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3^n} - \frac{2}{3^{n+1}} \right) \\ &= 1 - \frac{3-2}{3^{n+1}} \\ &= 1 - \frac{1}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

- 3) • Se demuestra para $n = 1$.

$$1^3 \stackrel{?}{=} \frac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4} \implies 1 \stackrel{\checkmark}{=} \frac{4}{4}$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$\text{H.q.d.: } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)^2[(n+1)+1]^2}{4}.$$

Simplificamos primero el lado derecho:

$$\frac{(n+1)^2[(n+1)+1]^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

Ahora trabajamos con el lado izquierdo, para esto primero sacamos $(n+1)^2$ a factor común. Ello simplificará los cálculos.

$$\begin{aligned} \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}_{\text{H.I.}} + (n+1)^3 &\stackrel{\text{H.I.}}{=} \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + (n+1) \right] \\ &= (n+1)^2 \frac{n^2 + 4(n+1)}{4} \\ &= (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \end{aligned}$$

Falta entonces averiguar el valor de la suma:

$$1 + \underbrace{8}_{2^3} + \underbrace{27}_{3^3} + \dots + \underbrace{13824}_{n^3}$$

Así, si $n^3 = 13824 \implies n = \sqrt[3]{13824} = 24$. Por lo que aplicamos de fórmula con dicho valor, así tenemos: Es decir:

$$1 + 2^3 + 3^3 + \dots + 24^3 = \frac{24^2 \cdot (24+1)^2}{4} = 90\,000.$$

- 4) • Se demuestra para $n = 1$. Observemos que el último término del lado izquierdo correspondería a

$$\frac{1}{(2 \cdot 1 - 1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} \text{ que es justamente el primero. Así:}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} \stackrel{?}{=} \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} \implies \frac{1}{3} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{3}$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

$$\text{H.q.d.: } \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{[2(n+1)-1][2(n+1)+1]} \stackrel{?}{=} \frac{n+1}{2(n+1)+1}.$$

Del lado derecho se tiene que: $\frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+3}.$

Para el lado izquierdo necesitamos expandir el producto del numerador porque hay una suma afuera del producto.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \frac{1}{[2(n+1)-1][2(n+1)+1]} \\ & \stackrel{\text{H.I.}}{=} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{[(2n+2)-1][(2n+2)+1]} \\ & = \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\ & = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\ & = \frac{(n+1)\cancel{(2n+1)}}{\cancel{(2n+1)}(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3} \end{aligned}$$

Ahora debemos calcular el valor de la suma: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{399}$, por lo que ocupamos saber el valor de n para aplicar la fórmula, valor que encontramos analizando el último término de la suma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{399} &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \implies (2n-1)(2n+1) = 399 \implies 4n^2 - 1 = 399 \\ &\implies 4n^2 = 400 \implies n^2 = 100 \implies n = 10 \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{399} &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2 \cdot 10 - 1)(2 \cdot 10 + 1)} \\ &= \frac{10}{2 \cdot 10 + 1} = \frac{10}{21} \end{aligned}$$

- 5) • Se demuestra para $n = 1$. Observamos que para $n = 1$, el último término del lado izquierdo corresponde a $\frac{1}{(4 \cdot 1 - 3)(4 \cdot 1 + 1)} = \frac{1}{1 \cdot 5}$, que es justamente el primer término, por lo que para comprobar si la desigualdad se cumple para $n = 1$, solo se debe utilizar un término del lado izquierdo:

$$\frac{1}{1 \cdot 5} \stackrel{?}{=} \frac{1}{4 \cdot 1 + 1} \implies \frac{1}{5} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{1}{5}$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

$$\text{H.q.d.: } \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} + \frac{1}{[4(n+1)-3][4(n+1)+1]} \stackrel{?}{=} \frac{n+1}{4(n+1)+1}.$$

Simplificamos primero el lado derecho: $\frac{n+1}{4(n+1)+1} = \frac{n+1}{4n+5}$.

Ahora el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}}_{\text{H.I.}} + \frac{1}{[4(n+1)-3][4(n+1)+1]} \\ &= \frac{n}{4n+1} + \frac{1}{[4n+4-3][4n+4+1]} \\ &= \frac{n}{4n+1} + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)} \\ &= \frac{n(4n+5)+1}{(4n+1)(4n+5)} = \frac{4n^2+5n+1}{(4n+1)(4n+5)} \\ &= \frac{(n+1)\cancel{(4n+1)}}{\cancel{(4n+1)}(4n+5)} = \frac{n+1}{4n+5} \end{aligned}$$

Para determinar la suma solicitada, se debe observar que la fórmula comienza con $\frac{1}{1 \cdot 5}$, aunque no así lo que nos piden calcular. Vamos a comenzar entonces desde el primer término, pero después pasamos al otro lado los términos que no corresponden:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{1}{1 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{13 \cdot 17}_{\substack{4n-3=13 \\ \Rightarrow n=4}}} + \frac{1}{17 \cdot 21} + \cdots + \frac{1}{\underbrace{397 \cdot 401}_{\substack{4n-3=397 \\ \Rightarrow n=100}}}}_{\substack{4 \\ 4 \cdot 4 + 1 = 17}} = \frac{100}{4 \cdot 100 + 1} \\ & \implies \frac{1}{17 \cdot 21} + \frac{1}{21 \cdot 25} + \cdots + \frac{1}{397 \cdot 401} = \frac{100}{401} - \frac{4}{17} = \frac{96}{6817} \end{aligned}$$

- 6) • Se demuestra para $n = 1$. Observamos que para $n = 1$, el último término del lado izquierdo corresponde a $1 \cdot 3 = 3$, que es justamente el primer término, por lo que para comprobar si la desigualdad se cumple para $n = 1$, solo se debe utilizar un término del lado izquierdo:

$$3 \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 2 \cdot 9}{6} \implies 3 \stackrel{\checkmark}{=} 3$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2) = \frac{n(n+1)(2n+7)}{6}.$$

$$\text{H.q.d.: } 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2) + (n+1)(n+3) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+9)}{6}.$$

Simplificamos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \dots + n(n+2)} + (n+1)(n+3) \\ & \stackrel{\text{H.I.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} + (n+1)(n+3) \\ & = \frac{n(n+1)(2n+7) + 6(n+1)(n+3)}{6} \\ & = (n+1) \left[\frac{n(2n+7) + 6(n+3)}{6} \right] \\ & = \frac{(n+1)(n+2)(2n+9)}{6} \end{aligned}$$

Para determinar la suma solicitada, se debe observar que la fórmula comienza con $1 \cdot 3$, aunque no así lo que nos piden calcular. Vamos a comenzar entonces desde el primer término, pero después pasamos al otro lado los términos que no corresponden:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot 3 + \dots + \underbrace{150 \cdot 152}_{n=150} + 151 \cdot 152 + \dots + \underbrace{201 \cdot 203}_{n=201} = \frac{201 \cdot 201 \cdot 409}{6} = 2767703 \\ & \underbrace{150 \cdot 151 \cdot 307}_{=1158925} \end{aligned}$$

$$\implies 151 \cdot 153 + 152 \cdot 154 \dots + 201 \cdot 203 = 2767703 - 1158925 = 1608778$$

- 7) • Se demuestra para $n = 1$. Observamos que para $n = 1$, el último término del lado izquierdo corresponde a $\frac{4}{5^0} + \frac{4}{5^1} = \frac{24}{5}$, que es justamente el primer término, por lo que para comprobar si la desigualdad se cumple para $n = 1$, solo se debe utilizar un término del lado izquierdo:

$$\frac{24}{5} \stackrel{?}{=} 5 - \frac{1}{5^1} \implies \frac{24}{5} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{24}{5}$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } \frac{4}{5^0} + \frac{4}{5^1} + \frac{4}{5^2} + \cdots + \frac{4}{5^n} = 5 - \frac{1}{5^n}.$$

$$\text{H.q.d.: } \frac{4}{5^0} + \frac{4}{5^1} + \frac{4}{5^2} + \cdots + \frac{4}{5^n} + \frac{4}{5^{n+1}} \stackrel{?}{=} 5 - \frac{1}{5^{n+1}}.$$

Simplificamos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\frac{4}{5^0} + \frac{4}{5^1} + \frac{4}{5^2} + \cdots + \frac{4}{5^n}}_{\text{H.I.}} + \frac{4}{5^{n+1}} \\ &= 5 - \frac{1}{5^n} + \frac{4}{5^{n+1}} \\ &= 5 - \frac{1}{5^{n+1}} \end{aligned}$$

Para determinar la suma solicitada, se debe observar que la fórmula comienza con $\frac{4}{5^0}$, aunque no así lo que nos piden calcular. Vamos a comenzar entonces desde el primer término, pero después pasamos al otro lado los términos que no corresponden:

$$\underbrace{\frac{4}{5^0} + \cdots + \frac{4}{5^9}}_{5 - \frac{4}{5^9}} + \frac{4}{5^{10}} + \cdots + \frac{4}{5^{30}} = 5 - \frac{4}{5^{30}}$$

$$\implies \frac{4}{5^{10}} + \frac{4}{5^{11}} + \cdots + \frac{4}{5^{30}} = 5 - \frac{4}{5^{30}} - \left[5 - \frac{4}{5^9} \right] = \frac{4}{5^9} - \frac{4}{5^{30}}$$

- 8) • Se demuestra para $n = 2$. Observamos que para $n = 2$, el último término del lado izquierdo corresponde a $1 \cdot 3 = 3$, que es justamente el primer término, por lo que para comprobar si la desigualdad se cumple para $n = 2$, solo se debe utilizar un término del lado izquierdo:

$$3 \stackrel{?}{=} \frac{2 \cdot 1 \cdot 9}{6} \implies 3 \stackrel{\checkmark}{=} 3$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + (n-1)(n+1) = \frac{n(n-1)(2n+5)}{6}.$$

$$\text{H.q.d.: } 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + (n-1)(n+1) + n(n+2) \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)n(2n+7)}{6}.$$

Simplificamos el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + (n-1)(n+1)} + n(n+2) \\ & \stackrel{\text{H.I.}}{=} \frac{n(n-1)(2n+5)}{6} + n(n+2) \\ & = \frac{n(n-1)(2n+5) + 6n(n+2)}{6} \\ & = n \left[\frac{(n-1)(2n+5) + 6n(n+2)}{6} \right] \\ & = \frac{(n+1)n(2n+7)}{6} \end{aligned}$$

Para determinar la suma solicitada, se debe observar que la fórmula comienza con $1 \cdot 3$, aunque no así lo que nos piden calcular. Vamos a comenzar entonces desde el primer término, pero después pasamos al otro lado los términos que no corresponden:

$$1 \cdot 3 + \cdots + \underbrace{99 \cdot 101}_{\substack{n-1=99 \\ \implies n=100}} + 100 \cdot 102 + \cdots + \underbrace{147 \cdot 149}_{\substack{n-1=147 \\ \implies n=148}} = \frac{148 \cdot 147 \cdot 301}{6} = 1091426$$

$$\frac{100 \cdot 99 \cdot 205}{6} = 338250$$

$$\implies 100 \cdot 102 + \cdots + 147 \cdot 149 = 1091426 - 338250 = 753176$$

- 9) • Se demuestra para $n = 2$. Observamos que para $n = 2$, el último término del lado izquierdo corresponde a $2 \cdot 5$, que es justamente el segundo término, por lo que para comprobar si la igualdad se deben utilizar dos términos del lado izquierdo:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \stackrel{?}{=} \frac{2(2+1)(2+5)}{3}$$

$$14 \stackrel{\checkmark}{=} 14$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+3) = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}.$$

$$\text{H.q.d.: } 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+3) + (n+1) \cdot (n+1+3) = \frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+5)}{3}.$$

Simplificamos primero el lado derecho:

$$\frac{(n+1)(n+1+1)(n+1+5)}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+6)}{3}.$$

Ahora el lado izquierdo:

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + \dots + n \cdot (n+3)}_{\text{H.I.}} + (n+1) \cdot (n+1+3) \\ & \stackrel{\text{H.I.}}{=} \frac{n(n+1)(n+5)}{3} + (n+1) \cdot (n+4) \\ & = \frac{n(n+1)(n+5) + 3(n+1) \cdot (n+4)}{3} \\ & = \frac{(n+1)(n(n+5) + 3(n+4))}{3} \\ & = \frac{(n+1)(n^2 + 5n + 3n + 12)}{3} \\ & = \frac{(n+1)(n+2)(n+6)}{3} \end{aligned}$$

Para determinar la suma solicitada, se debe observar que la fórmula comienza con $1 \cdot 4$, aunque no así lo que nos piden calcular. Vamos a comenzar entonces desde el primer término, pero después pasamos al otro lado los términos que no corresponden:

$$\underbrace{1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + \dots + \underbrace{11 \cdot 14}_{n=11}}_{\substack{11(11+1)(11+5) \\ =13}} + 12 \cdot 15 + \dots + \underbrace{990}_{\substack{n^2+3n=990 \\ \Rightarrow n=30}} = \frac{30(30+1)(30+5)}{3}$$

$$\Rightarrow 12 \cdot 15 + 13 \cdot 16 + \dots + 990 = 10850 - 13 = 10837$$

- 10) • Se demuestra para $n = 1$. Observamos que para $n = 1$, el último término del lado izquierdo corresponde a $1 \cdot 5$, que es justamente el primer término, por lo que para comprobar si la igualdad se debe utilizar sólo un término del lado izquierdo:

$$1 \cdot 5 \stackrel{?}{=} \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 13)}{6}$$

$$5 \stackrel{\checkmark}{=} 5$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + \cdots + n(n+4) = \frac{n(n+1)(2n+13)}{6}.$$

$$\text{H.q.d.: } 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + \cdots + n(n+4) + (n+1)(n+1+4) = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+13)}{6}.$$

Simplificamos primero el lado derecho:

$$\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+13)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+15)}{6}$$

Ahora el lado izquierdo:

$$\underbrace{1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + \cdots + n(n+4)}_{\text{H.I.}} + (n+1)(n+1+4)$$

$$\stackrel{\text{H.I.}}{=} \frac{n(n+1)(2n+13)}{6} + (n+1)(n+5)$$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+13) + 6(n+5))}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 13n + 6n + 30)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+15)}{6}$$

Para determinar la suma solicitada, se debe observar que la fórmula comienza con $1 \cdot 5$, aunque no así lo que nos piden calcular. Vamos a comenzar entonces desde el primer término, pero después pasamos al otro lado los términos que no corresponden:

$$\underbrace{1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + \cdots + \underbrace{10 \cdot 14}_{n=10}}_{\frac{10(10+1)(2 \cdot 10 + 13)}{6} = 605} + 10 \cdot 14 + \cdots + \underbrace{1365}_{\substack{n^2+4n=1365 \\ \Rightarrow n=35}} = \frac{35(35+1)(2 \cdot 35 + 13)}{6}$$

$$\Rightarrow 10 \cdot 14 + 11 \cdot 15 + \cdots + 1365 = 17430 - 605 = 16825$$

- 11) • Se demuestra para $n = 1$. Observamos que para $n = 1$, el último término del lado izquierdo corresponde a 2, que es justamente el segundo término, por lo que para comprobar si la igualdad se deben utilizar dos términos del lado izquierdo:

$$1 + 2 \stackrel{?}{=} 2^{1+1} - 1$$

$$3 \stackrel{\checkmark}{=} 3$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$

H.q.d.: $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1+1} - 1.$

Al trabajar con dicha igualdad obtenemos:

$$\underbrace{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}_{\text{H.I.}} + 2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$$

$$= 2^{n+1}(1 + 1) - 1$$

$$= 2^{n+1} \cdot 2 - 1$$

$$= 2^{n+1+1} - 1$$

Para determinar la suma solicitada, se debe observar que la fórmula comienza con 1, aunque no así lo que nos piden calcular. Vamos a comenzar entonces desde el primer término, pero después pasamos al otro lado los términos que no corresponden:

$$\underbrace{1 + 2}_3 + 4 + 8 + \dots + \underbrace{32768}_{\substack{2^n = 32768 \\ \Rightarrow n = 15}} = 2^{15+1} - 1 = 65535$$

$$\Rightarrow 4 + 8 + \dots + 32768 = 65535 - 3 = 65532$$

5.0.2

- 1) Es equivalente demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 13k$.

- Se demuestra para $n = 1$, $\exists k$ tal que $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 13k$:

$$4^{2 \cdot 1 + 1} + 3^{1 + 2} = 4^3 + 3^3 = 91 = 13 \cdot \underbrace{7}_k$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\forall n = 1, 2, \dots, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $4^{2n+1} + 3^{n+2} = 13k$. Se necesita despejar, para después, uno de los dos términos de la izquierda, por ejemplo

$$4^{2n+1} = 13k - 3^{n+2}$$

H.q.d.: $\exists k'$ tal que $4^{2(p+1)+1} + 3^{(p+1)+2} = 13k'$.

Vamos a buscar k' tal que esta expresión sea igual a $13k'$. Usamos k' para diferenciarla de la k de la hipótesis de inducción. Así tenemos:

$$\begin{aligned} & 4^{2(n+1)+1} + 3^{(n+1)+2} \\ &= 4^{2n+2+1} + 3^{n+3} \\ &= 4^2 \cdot 4^{2n+1} + 3^{n+3} \\ &\stackrel{\text{H.I.}}{=} 16(13k - 3^{n+2}) + 3^{n+3} \\ &= 13 \cdot (16k) - 16 \cdot 3^{n+2} + 3^{n+3} \\ &= 13 \cdot (16k) + 3^{n+2}(-16 + 3) \\ &= 13 \cdot \underbrace{(16k - 3^{n+2})}_{k'} \end{aligned}$$

2) Es equivalente demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$.

- Se demuestra para $n = 1, \exists k$ tal que $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$:

$$3^{2 \cdot 1 + 1} + 2^{1+2} = 3^3 + 2^3 = 35 = 7 \cdot \underbrace{5}_k$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\forall n = 1, 2, \dots, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 7k$. Despejamos uno de los dos términos:

$$3^{2n+1} = 7k - 2^{n+2}$$

.

H.q.d.: $\exists k'$ tal que $3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} = 7k'$.

Vamos a buscar k' tal que esta expresión sea igual a $7k'$. Usamos k' para diferenciarla de la k de la hipótesis de inducción. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 & 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} \\
 &= 3^{2n+2+1} + 2^{n+3} \\
 &= 3^2 \cdot 3^{2n+1} + 2^{n+3} \\
 &\stackrel{\text{H.I.}}{=} 9 \cdot (7k - 2^{n+2}) + 2^{n+3} \\
 &= 7 \cdot 9k - 9 \cdot 2^{n+2} + 2^{n+3} \\
 &= 7 \cdot 9k + 2^{n+2}(2 - 9) \\
 &= 7 \cdot \underbrace{(9k - 2^{n+2})}_{k'}
 \end{aligned}$$

3) Es equivalente demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $3^{2n} + 7^{2n} + 6 = 8k$.

- Se demuestra para $n = 1$, $\exists k$ tal que $3^{2n} + 7^{2n} + 6 = 8k$:

$$3^{2 \cdot 1} + 7^{2 \cdot 1} + 6 = 3^2 + 7^2 + 6 = 8 \cdot \underbrace{8}_k.$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\forall n = 1, 2, \dots, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $3^{2n} + 7^{2n} + 6 = 8k$. Despejamos uno de los dos términos:

$$3^{2n} = 8k - 7^{2n} - 6$$

H.q.d.: $\exists k'$ tal que $3^{2(n+1)} + 7^{2(n+1)} + 6 = 8k'$:

Vamos a buscar k' tal que esta expresión sea igual a $8k'$. Usamos k' para diferenciarla de la k de la hipótesis de inducción. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 & 3^{2(n+1)} + 7^{2(n+1)} + 6 \\
 &= 3^{2n+2} + 7^{2n+2} + 6 \\
 &= 3^2 \cdot 3^{2n} + 7^{2n+2} + 6 \\
 &\stackrel{\text{H.I.}}{=} 9 \cdot (8k - 7^{2n} - 6) + 7^{2n+2} + 6 \\
 &= 8 \cdot 9k - 9 \cdot 7^{2n} - 54 + 7^{2n+2} + 6 \\
 &= 8 \cdot 9k + 7^{2n}(7^2 - 9) - 48 \\
 &= 8 \cdot 9k + 40 \cdot 7^{2n} - 48 \\
 &= 8 \cdot \underbrace{(9k + 5 \cdot 7^{2n} - 6)}_{k'}
 \end{aligned}$$

4) Es equivalente demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $10^{n+1} + 12 \cdot 4^{n+2} - 4 = 9k$.

- Se demuestra para $n = 0$, $\exists k$ tal que $10^{n+1} + 12 \cdot 4^{n+2} - 4 = 9k$:

$$10^{0+1} + 12 \cdot 4^{0+2} - 4 = 10 + 12 \cdot 16 - 4 = 198 = 9 \cdot \underbrace{22}_k$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\forall n = 0, 1, \dots, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $10^{n+1} + 12 \cdot 4^{n+2} - 4 = 9k$. Despejamos uno de los dos términos:

$$10^{n+1} = 9k - 12 \cdot 4^{n+2} + 4$$

H.q.d.: $\exists k'$ tal que $10^{(n+1)+1} + 12 \cdot 4^{(n+1)+2} - 4 = 9k'$.

Vamos a buscar k' tal que esta expresión sea igual a $9k'$. Usamos k' para diferenciarla de la k de la hipótesis de inducción. Así tenemos:

$$\begin{aligned} & 10^{(n+1)+1} + 12 \cdot 4^{(n+1)+2} - 4 \\ &= 10 \cdot 10^{n+1} + 12 \cdot 4^{(n+2)} \cdot 4 - 4 \\ & \text{H.I.} \\ &= 10 [9k - 12 \cdot 4^{n+2} + 4] + 12 \cdot 4^{(n+2)} \cdot 4 - 4 \\ &= 9 \cdot 10k - 120 \cdot 4^{n+2} + 40 + 48 \cdot 4^{n+2} - 4 \\ &= 9 \cdot 10k - 72 \cdot 4^{n+2} - 36 \\ &= 9 \cdot \underbrace{(10k - 8 \cdot 4^{n+2} - 4)}_{k'} \end{aligned}$$

5) Es equivalente demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $3^{2n} + 7^{2n} + 6 = 8k$.

- Se demuestra para $n = 1$, $\exists k$ tal que $3^{2n} + 7^{2n} + 6 = 8k$:

$$3^{2 \cdot 1} + 7^{2 \cdot 1} + 6 = 3^2 + 7^2 + 6 = 8 \cdot \underbrace{8}_k$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\forall n = 1, 2, \dots, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $3^{2n} + 7^{2n} + 6 = 8k$. Despejamos uno de los dos términos:

$$3^{2n} = 8k - 7^{2n} - 6$$

H.q.d.: $\exists k'$ tal que $3^{2(n+1)} + 7^{2(n+1)} + 6 = 8k'$:

Vamos a buscar k' tal que esta expresión sea igual a $8k'$. Usamos k' para diferenciarla de la k de la hipótesis de inducción. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 & 3^{2(n+1)} + 7^{2(n+1)} + 6 \\
 &= 3^{2n+2} + 7^{2n+2} + 6 \\
 &= 3^2 \cdot 3^{2n} + 7^{2n+2} + 6 \\
 &\stackrel{\text{H.I.}}{=} 9 \cdot (8k - 7^{2n} - 6) + 7^{2n+2} + 6 \\
 &= 8 \cdot 9k - 9 \cdot 7^{2n} - 54 + 7^{2n+2} + 6 \\
 &= 8 \cdot 9k + 7^{2n}(7^2 - 9) - 48 \\
 &= 8 \cdot 9k + 40 \cdot 7^{2n} - 48 \\
 &= 8 \cdot \underbrace{(9k + 5 \cdot 7^{2n} - 6)}_{k'}
 \end{aligned}$$

6) Es equivalente demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $4^{2n+1} + 31^{n+1} - 5 = 15k$.

- Se demuestra para $n = 0$, $\exists k$ tal que $4^{2n+1} + 31^{n+1} - 5 = 15k$:

$$4^{0+1} + 31^{0+1} - 5 = 30 = 5 \cdot \underbrace{6}_k$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\forall n = 0, 1, \dots, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $4^{2n+1} + 31^{n+1} - 5 = 15k$. Despejamos uno de los dos términos:

$$31^{n+1} = 15k - 4^{2n+1} + 5$$

H.q.d.: $\exists k'$ tal que $4^{2(n+1)+1} + 31^{(n+1)+1} - 5 = 15k'$.

Vamos a buscar k' tal que esta expresión sea igual a $15k'$. Usamos k' para diferenciarla de la k de la hipótesis de inducción. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 & 4^{2(n+1)+1} + 31^{(n+1)+1} - 5 \\
 &= 4^{2n+3} + 31^{n+2} - 5 \\
 &= 4^2 \cdot 4^{2n+1} + 31 \cdot 31^{n+1} - 5 \\
 &\stackrel{\text{H.I.}}{=} 16 \cdot 4^{2n+1} + 31 \left[15k - 4^{2n+1} + 5 \right] - 5 \\
 &= 16 \cdot 4^{2n+1} + 31 \cdot 15k - 31 \cdot 4^{2n+1} + 155 - 5 \\
 &= -15 \cdot 4^{2n+1} + 15 \cdot 31k + 150 \\
 &= 15 \cdot \underbrace{(-4^{2n+1} + 31k + 10)}_{k'}
 \end{aligned}$$

7) Es equivalente demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9k$.

- Se demuestra para $n = 0$, $\exists k$ tal que $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9k$:

$$10^0 + 3 \cdot 4^{0+2} + 5 = 54 = 9 \cdot \underbrace{6}_k$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\forall n = 0, 1, \dots, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5 = 9k$. Despejamos uno de los dos términos:

$$10^n = 9k - 3 \cdot 4^{n+2} - 5$$

H.q.d.: $\exists k'$ tal que $10^{(n+1)} + 3 \cdot 4^{(n+1)+2} + 5 = 9k'$.

Vamos a buscar k' tal que esta expresión sea igual a $9k'$. Usamos k' para diferenciarla de la k de la hipótesis de inducción. Así tenemos:

$$\begin{aligned} & 10^{n+1} + 3 \cdot 4^{n+3} + 5 \\ &= 10 \cdot 10^n + 3 \cdot 4 \cdot 4^{n+2} + 5 \\ & \stackrel{\text{H.I.}}{=} 10 [9k - 3 \cdot 4^{n+2} - 5] + 12 \cdot 4^{n+2} + 5 \\ &= 9 \cdot 10k - 30 \cdot 4^{n+2} - 50 + 12 \cdot 4^{n+2} + 5 \\ &= 9 \cdot 10k - 18 \cdot 4^{n+2} - 45 \\ &= 9 \cdot \underbrace{(10k - 2 \cdot 4^{n+2} - 5)}_{k'} \end{aligned}$$

8) Es equivalente demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $7^{2n} + 16n - 1 = 64k$.

- Se demuestra para $n = 1$, $\exists k$ tal que $7^{2n} + 16n - 1 = 64k$:

$$7^{2 \cdot 1} + 16 \cdot 1 - 1 = 64 = 64 \cdot \underbrace{1}_k$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\forall n = 1, 2, \dots, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $7^{2n} + 16n - 1 = 64k$. Despejamos uno de los dos términos:

$$7^{2n} = 64k + 1 - 16n$$

H.q.d.: $\exists k'$ tal que $7^{2(n+1)} + 16(n+1) - 1 = 64k'$:

Vamos a buscar k' tal que esta expresión sea igual a $64k'$. Usamos k' para diferenciarla de la k de la hipótesis de inducción. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 & 7^{2(n+1)} + 16(n+1) - 1 \\
 &= 7^{2n+2} + 16n + 16 - 1 \\
 &= 7^{2n} \cdot 7^2 + 16n + 16 - 1 \\
 & \text{H.I.} \\
 & \equiv (64k + 1 - 16n) \cdot 49 + 16n + 15 \\
 &= 64 \cdot 49 \cdot k + 49 - 784n + 16n + 15 \\
 &= 64 \cdot 49k - 768n + 64 \\
 &= 64 \cdot 49 \cdot k - 64 \cdot 12n + 64 \\
 &= 64 \cdot \underbrace{(49 \cdot k - 12n + 1)}_{k'}
 \end{aligned}$$

9) Es equivalente demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{2n} + 15n - 1 = 9k$.

- Se demuestra para $n = 2$, $\exists k$ tal que $2^{2n} + 15n - 1 = 9k$:

$$2^{2 \cdot 1} + 15 \cdot 1 - 1 = 18 = 9 \cdot \underbrace{2}_k.$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\forall n = 2, 3, \dots, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{2n} + 15n - 1 = 9k$. Despejamos uno de los dos términos:

$$2^{2n} = 9k - 15n + 1$$

H.q.d.: $\exists k'$ tal que $2^{2(n+1)} + 15(n+1) - 1 = 9k'$:

Vamos a buscar k' tal que esta expresión sea igual a $9k'$. Usamos k' para diferenciarla de la k de la hipótesis de inducción. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 & 2^{2(n+1)} + 15(n+1) - 1 \\
 &= 2^{2n+2} + 15n + 15 - 1 \\
 &= 2^{2n} \cdot 2^2 + 15n + 14 \\
 & \text{H.I.} \\
 & \equiv (9k - 15n + 1) \cdot 4 + 15n + 14 \\
 &= 9 \cdot 4 \cdot k - 60n + 4 + 15n + 14 \\
 &= 9 \cdot 4 \cdot k - 45n + 18 \\
 &= 9 \cdot 4 \cdot \underbrace{k - 5n + 2}_{k'}
 \end{aligned}$$

10) Es equivalente demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $3^{3n+1} + 2^{n+1} = 5k$.

- Se demuestra para $n = 1$, $\exists k$ tal que $3^{3n+1} + 2^{n+1} = 5k$:

$$3^{3 \cdot 1 + 1} + 2^{1+1} = 85 = 5 \cdot \underbrace{17}_k.$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\forall n = 1, 2, 3, \dots, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $3^{3n+1} + 2^{n+1} = 5k$. Despejamos uno de los dos términos:

$$3^{3n+1} = 5k - 2^{n+1}$$

H.q.d.: $\exists k'$ tal que $3^{3(n+1)+1} + 2^{n+1+1} = 5k'$:

Vamos a buscar k' tal que esta expresión sea igual a $5k'$. Usamos k' para diferenciarla de la k de la hipótesis de inducción. Así tenemos:

$$\begin{aligned} & 3^{3(n+1)+1} + 2^{n+1+1} \\ &= 3^{3n+3+1} + 2^{n+1} \cdot 2^1 \\ &= 3^{3n+1} \cdot 3^3 + 2^{n+1} \cdot 2 \\ &\stackrel{\text{H.I.}}{=} (5k - 2^{n+1}) \cdot 3^3 + 2^{n+1} \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 27 \cdot k - 27 \cdot 2^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 9 \cdot k - 25 \cdot 2^{n+1} \\ &= 5 \cdot \underbrace{(9 \cdot k - 5 \cdot 2^{n+1})}_{k'} \end{aligned}$$

11) Es equivalente demostrar que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133k$.

- Se demuestra para $n = 0$, $\exists k$ tal que $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133k$:

$$11^{1+2} + 12^{2 \cdot 1 + 1} = 3059 = 133 \cdot \underbrace{23}_k.$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\forall n = 0, 1, 2, \dots, \exists k \in \mathbb{Z}$ tal que $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133k$. Despejamos uno de los dos términos:

$$11^{n+2} = 133k - 12^{2n+1}$$

H.q.d.: $\exists k'$ tal que $11^{n+1+2} + 12^{2(n+1)+1} = 133k'$:

Vamos a buscar k' tal que esta expresión sea igual a $5k'$. Usamos k' para diferenciarla de la k de la hipótesis de inducción. Así tenemos:

$$\begin{aligned} & 11^{n+1+2} + 12^{2(n+1)+1} \\ &= 11^{n+2} \cdot 11 + 12^{2n+2+1} \\ &= 11^{n+2} \cdot 11 + 12^{2n+1} \cdot 12^2 \\ &\stackrel{\text{H.I.}}{=} (133k - 12^{2n+1}) \cdot 11 + 12^{2n+1} \cdot 12^2 \\ &= 133 \cdot 11 \cdot k - 11 \cdot 12^{2n+1} + 144 \cdot 12^{2n+1} \\ &= 133 \cdot 11 \cdot k + 133 \cdot 12^{2n+1} \\ &= 133 \cdot \underbrace{(11 \cdot k + 12^{2n+1})}_{k'} \end{aligned}$$

5.0.3

- 1) • Se demuestra que es cierto para $n = 2$. En este caso el primer término es $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$, mientras que el último término es $\frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4}$. Además, el denominador va aumentando de uno en uno, por lo que se tiene que:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \stackrel{?}{>} \frac{13}{24} \implies \frac{7}{12} \stackrel{\checkmark}{>} \frac{13}{24}$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.} \quad \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

$$\text{H.q.d.} \quad \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} > \frac{13}{24}$$

Para poder usar la hipótesis de inducción, necesitamos sumar (y restar) el término $1/(n+1)$. Además los puntos suspensivos esconden un par de términos, que necesitamos que queden explícitos.

Así, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \dots + \frac{1}{2(n+1)} \\
 &= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2} \\
 &= \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}}_{\text{H.I.}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
 &> \frac{13}{24} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

Ahora nos falta asegurarnos que los tres últimos términos no dan un número negativo, para que toda la expresión sea mayor a $\frac{13}{24}$:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{(2n+2)(n+1) + (2n+1)(n+1) - (2n+1)(2n+2)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} \\
 &= \frac{2n^2 + 4n + 2 + 2n^2 + 3n + 1 - (4n^2 + 6n + 2)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} \\
 &= \frac{n+1}{(n+1)(2n+1)(2n+2)} = \epsilon > 0
 \end{aligned}$$

Entonces $\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n+2} > \frac{13}{24} + \epsilon > \frac{13}{24}$

2) • Se demuestra que es cierto para $n = 2$:

$$\frac{2^4}{4} < 1^3 + 2^3 \implies 4 < 9$$

• Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $\frac{n^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$

H.q.d.: $\frac{(n+1)^4}{4} < 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3:$

Expandiendo el lado izquierdo (por ejemplo, usando el triángulo de Pascal):

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 1 \\
 & & 1 & 1 \\
 & 1 & 2 & 1 \\
 1 & 3 & 3 & 1 \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1
 \end{array}$$

Tenemos:

$$\frac{(n+1)^4}{4} = \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{4} = \frac{n^4}{4} + n^3 + \frac{3n^2}{2} + n + \frac{1}{4}$$

Y trabajando con el lado derecho:

$$\begin{aligned} & \underbrace{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}_{\text{H.I.}} + (n+1)^3 \\ & > \frac{n^4}{4} + n^3 + \underbrace{3n^2}_{> \frac{3n^2}{2}} + \underbrace{3n}_{> n} + \underbrace{1}_{> \frac{1}{4}} \\ & > \frac{n^4}{4} + n^3 + \frac{3n^2}{2} + n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- 3) • Se demuestra que es cierto para $n = 1$:

$$\frac{1}{1} \stackrel{?}{<} \frac{1}{2} + 1 \implies 1 \stackrel{\checkmark}{<} \frac{3}{2}$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

$$\text{H.I.: } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \frac{n}{2} + 1.$$

$$\text{H.q.d.: } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \stackrel{?}{\leq} \frac{n+1}{2} + 1$$

Para probar lo anterior, se prueba primero las proposiciones:

$$1) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \leq \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$2) \quad \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{n+1} \leq \frac{n+1}{2} + 1$$

Observe que la proposición I se obtiene inmediatamente de la hipótesis de inducción.

Probemos la proposición II Y trabajando con el lado derecho:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} + 1 + \frac{1}{n+1} & \leq \frac{n+1}{2} + 1 \\ \iff \frac{n(n+1) + 2}{2(n+1)} & \leq \frac{n+1}{2} \\ \iff n^2 + n + 2 & \leq n^2 + 2n + 1 \\ \iff 1 & \leq n \end{aligned}$$

Utilizando transitividad, en las proposiciones *I* y *II*, se obtiene lo que se deseaba demostrar.

- 4) • Se demuestra que es cierto para $n = 4$:

$$3^4 \stackrel{?}{<} 5! \implies 81 \stackrel{\checkmark}{<} 120$$

- Se asume que la proposición es cierta para n y se debe demostrar que es verdadera para $n + 1$. Así tenemos:

H.I.: $3^n < (n + 1)!$.

H.q.d.: $3^{n+1} \stackrel{?}{<} (n + 2)!$

Expandiendo el lado derecho tenemos:

$$(n + 2)! = (n + 2)(n + 1)! \stackrel{\text{H.I.}}{>} (n + 2)3^n$$

Basta verificar que se cumple

$$(n + 2)3^n > 3^{n+1}, \text{ lo cual es verdadero para } n \geq 4.$$

5.04

- a.) Cierto para $n = 4$ pues $2^4 < 4!$
 b.) Como $2^n < n!$ entonces $2^n \cdot 2 < n! \cdot 2 < n!(n + 1) = (n + 1)!$ pues $n + 1 > 2$.

Por tanto $2^{n+1} < (n + 1)!$

5.05 Se omite.

5.06

- a.) Cierto para $n = 4$ pues $4^3 < 3^n$
 b.) Como $n \geq 4 \implies \begin{cases} n > 2 \implies n^2 > 4 \implies n^3 > 4n = 3n + n > 3n + 1 \\ n > 3 \implies n^3 > 3n^2 \end{cases}$

$$\text{Entonces, } 3n^3 = n^3 + n^3 + n^3 > n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n + 1)^3$$

$$\text{Como } n^3 < 3^n \implies 3n^3 < 3^{n+1}, \text{ por tanto } (n + 1)^3 < 3^{n+1}$$

5.07

- a.) Cierto para $n = 1$ pues $5^2 + 6 = 31 \cdot 1$

$$\begin{aligned}
 \text{b.) } 5^{n+2} + 6^{2n+1} &= 5^{n+1} \cdot 5 + 6^{2n+1} \\
 &= (31k - 6^{2n-1}) \cdot 5 + 6^{2n+1}, \quad \text{pues } 5^{n+1} + 6^{2n-1} = 31k \\
 &= 31k \cdot 5 - 6^{2n-1}(5 - 6^2) = 31 \cdot k_2 \quad \text{con } k_2 = 5k - 6^{2n-1}
 \end{aligned}$$

5.0.8   Se omite.

Soluciones del Capítulo 6

6.2. Relaciones de recurrencia

6.2.1  

1) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$\begin{aligned}
 a_2 &= 5a_1 - 6a_0 = 5 \cdot (0) - 6 \cdot (-1) = 6 \\
 a_3 &= 5a_2 - 6a_1 = 5 \cdot (6) - 6 \cdot (0) = 30 \\
 a_4 &= 5a_3 - 6a_2 = 5 \cdot (30) - 6 \cdot (6) = 114 \\
 a_5 &= 5a_4 - 6a_3 = 5 \cdot (114) - 6 \cdot (30) = 390
 \end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 5x - 6 \\
 x^2 - 5x + 6 &= 0 \\
 (x - 3)(x - 2) &= 0 \\
 \implies x &= 3, x = 2
 \end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 2^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}
 A + B &= -1 \\
 3A + 2B &= 0
 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 2$ y $B = -3$, es decir, $a_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$.

Comprobando obtenemos que $a_5 = 2 \cdot 3^5 - 3 \cdot 2^5 = 390$.

2) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de U_5 :

$$\begin{aligned}
 U_3 &= -U_2 + 8U_1 + 12U_0 = -46 + 8 \cdot (-2) + 12 \cdot (3) = -26 \\
 U_4 &= -U_3 + 8U_2 + 12U_1 = -(-26) + 8 \cdot (46) + 12 \cdot (-2) = 370 \\
 U_5 &= -U_4 + 8U_3 + 12U_2 = -370 + 8 \cdot (-26) + 12 \cdot (46) = -26
 \end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned}x^3 &= -x^2 + 8x + 12 \\x^3 + x^2 - 8x - 12 &= 0 \\(x - 3)(x + 2)^2 &= 0 \\ \implies x &= 3, \underbrace{x = -2}_{2 \text{ veces}}\end{aligned}$$

Entonces: $\mathbf{U}_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n + C \cdot n \cdot (-2)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}A + B &= 3 \\3A - 2B - 2C &= -2 \\9A + 4B + 8C &= 46\end{aligned}$$

cuya solución es $A = 2$, $B = 1$ y $C = 3$, es decir, $\mathbf{U}_n = 2 \cdot 3^n + (-2)^n + 3 \cdot n \cdot (-2)^n$.

Comprobando obtenemos que $\mathbf{U}_5 = 2 \cdot 3^5 + (-2)^5 + 3 \cdot 5 \cdot (-2)^5 = -26$.

3) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de \mathbf{U}_5 :

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_3 &= \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_0 = 0 + 1 - 6 = -5 \\ \mathbf{U}_4 &= \mathbf{U}_3 + \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_1 = -5 + 0 - 1 = -6 \\ \mathbf{U}_5 &= \mathbf{U}_4 + \mathbf{U}_3 - \mathbf{U}_2 = -6 + -5 - 0 = -11\end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned}x^3 &= x^2 + x - 1 \\x^3 - x^2 - x + 1 &= 0 \\(x + 1)(x - 1)^2 &= 0 \\ \implies x &= -1, \underbrace{x = 1}_{2 \text{ veces}}\end{aligned}$$

Entonces: $\mathbf{U}_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot 1^n + C \cdot n \cdot 1^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}A + B &= 6 \\-A + B + C &= 1 \\A + B + 2C &= 0\end{aligned}$$

cuya solución es $A = 1$, $B = 5$ y $C = -3$, es decir, $\mathbf{U}_n = (-1)^n + 5 \cdot 1^n - 3 \cdot n \cdot 1^n$.

Comprobando obtenemos que $\mathbf{U}_5 = (-1)^5 + 5 \cdot 1^5 - 3 \cdot 5 \cdot 1^5 = -11$.

4) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$\begin{aligned}a_2 &= -4a_1 - 4a_0 = -4 \cdot (-8) - 4 \cdot (3) = 20 \\a_3 &= -4a_2 - 4a_1 = -4 \cdot (20) - 4 \cdot (-8) = -48 \\a_4 &= -4a_3 - 4a_2 = -4 \cdot (-48) - 4 \cdot (20) = 112 \\a_5 &= -4a_4 - 4a_3 = -4 \cdot (112) - 4 \cdot (-48) = -256\end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned}x^2 &= -4x - 4 \\x^2 + 4x + 4 &= 0 \\(x + 2)^2 &= 0 \\ \implies \underbrace{x = -2}_{2 \text{ veces}}\end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot n \cdot (-2)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}A &= 3 \\-2A - 2B &= -8\end{aligned}$$

cuya solución es $A = 3$ y $B = 1$, es decir, $a_n = 3 \cdot (-2)^n + n \cdot (-2)^n$.

Comprobando obtenemos que $a_5 = 3 \cdot (-2)^5 + 5 \cdot (-2)^5 = -256$.

5) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$\begin{aligned}a_2 &= a_1 + 6a_0 = -13 + 6 \cdot 4 = 11 \\a_3 &= a_2 + 6a_1 = 11 + 6 \cdot -13 = -67 \\a_4 &= a_3 + 6a_2 = -67 + 6 \cdot 11 = -1 \\a_5 &= a_4 + 6a_3 = -1 + 6 \cdot -67 = -403\end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned}x^2 &= x + 6 \\x^2 - x - 6 &= 0 \\(x - 3)(x + 2) &= 0 \\ \implies x = 3, x = -2\end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot (3)^n + B \cdot (-2)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 4 \\ 3A - 2B &= -13 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = -1$ y $B = 5$, es decir, $a_n = -1 \cdot (3)^n + 5 \cdot (-2)^n$.

Comprobando obtenemos que $a_5 = -1 \cdot (3)^5 + 5 \cdot (-2)^5 = -403$.

6) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de U_5 :

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + a_1 - a_0 = 12 + 1 - 6 = 7 \\ a_4 &= a_3 + a_2 - a_1 = 7 + 12 - 1 = 18 \\ a_5 &= a_4 + a_3 - a_2 = 18 + 7 - 12 = 13 \end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 + x - 1 \\ x^3 - x^2 - x + 1 &= 0 \\ (x - 1)^2(x + 1) &= 0 \\ \implies x &= -1, \underbrace{x = 1}_{2 \text{ veces}} \end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot (1)^n + C \cdot n \cdot (1)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 6 \\ -A + B + C &= 1 \\ A + B + 2C &= 12 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 4$, $B = 2$ y $C = 3$, es decir, $a_n = 4 \cdot (-1)^n + 2 \cdot (1)^n + 3 \cdot n \cdot (1)^n$.

Comprobando obtenemos que $a_5 = 4 \cdot (-1)^5 + 2 \cdot (1)^5 + 3 \cdot 5 \cdot (1)^5 = 13$.

7) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de U_5 :

$$\begin{aligned} a_3 &= 4a_2 + 16a_1 - 64a_0 = 4 \cdot 112 + 16 \cdot 20 - 64 \cdot 3 = 576 \\ a_4 &= 4a_3 + 16a_2 - 64a_1 = 4 \cdot 576 + 16 \cdot 112 - 64 \cdot 20 = 2816 \\ a_5 &= 4a_4 + 16a_3 - 64a_2 = 4 \cdot 2816 + 16 \cdot 576 - 64 \cdot 112 = 13312 \end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned}
 x^3 &= 4x^2 + 16x - 64 \\
 x^3 - 4x^2 - 16x + 64 &= 0 \\
 (x + 4)(x - 4)^2 &= 0 \\
 \implies x &= -4, \underbrace{x = 4}_{2 \text{ veces}}
 \end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot (-4)^n + B \cdot (4)^n + C \cdot n \cdot (4)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}
 A + B &= 3 \\
 -4A + 4B + 4C &= 20 \\
 16A + 16B + 32C &= 112
 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 0$, $B = 3$ y $C = 2$, es decir, $a_n = 3 \cdot (4)^n + 2 \cdot n \cdot (4)^n$.

Comprobando obtenemos que $a_5 = 3 \cdot (4)^5 + 2 \cdot 5 \cdot (4)^5 = 13312$.

8) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$\begin{aligned}
 a_3 &= 2a_2 + 5a_1 - 6a_0 = 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 10 - 6 \cdot (-1) = 52 \\
 a_4 &= 2a_3 + 5a_2 - 6a_1 = 2 \cdot 52 + 5 \cdot (-2) - 6 \cdot 10 = 34 \\
 a_5 &= 2a_4 + 5a_3 - 6a_2 = 2 \cdot 34 + 5 \cdot 52 - 6 \cdot (-2) = 340
 \end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned}
 x^3 - 2x^2 - 5x + 6 &= 0 \\
 (x - 3)(x - 1)(x + 2) &= 0 \\
 \implies x &= 3, x = 1, x = -2
 \end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot 3^n + B \cdot 1^n + C \cdot (-2)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}
 A + B + C &= -1 \\
 3A + B - 2C &= 10 \\
 9A + B + 4C &= -2
 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 1$, $B = 1$ y $C = -3$, es decir, $a_n = 3^n + 1 - 3 \cdot (-2)^n$.

Comprobando obtenemos que $a_5 = 3^5 + 1 - 3 \cdot (-2)^5 = 340$.

9) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$\begin{aligned}a_3 &= 2a_2 + 4a_1 - 8a_0 = 2 \cdot 24 + 4 \cdot (-6) - 8 \cdot 8 = -40 \\a_4 &= 2a_3 + 4a_2 - 8a_1 = 2 \cdot (-40) + 4 \cdot 24 - 8 \cdot (-6) = 64 \\a_5 &= 2a_4 + 4a_3 - 8a_2 = 2 \cdot 64 + 4 \cdot (-40) - 8 \cdot 24 = -224\end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned}x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= 0 \\(x - 2)^2(x + 2) &= 0 \\ \implies \underbrace{x = 2}_{2 \text{ veces}}, x = -2\end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot (-2)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}A + C &= 8 \\2A + 2B - 2C &= -6 \\4A + 8B + 4C &= 24\end{aligned}$$

cuya solución es $A = 3$, $B = -1$ y $C = 5$, es decir, $a_n = 3 \cdot 2^n - n \cdot 2^n + 5 \cdot (-2)^n$.

Comprobando obtenemos que $a_5 = 3 \cdot 2^5 - 5 \cdot 2^5 + 5 \cdot (-2)^5 = -224$.

10) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$\begin{aligned}a_3 &= -3a_2 - 3a_1 - a_0 = -3 \cdot 4 - 3 \cdot (-4) - 2 = -2 \\a_4 &= -3a_3 - 3a_2 - a_1 = -3 \cdot (-2) - 3 \cdot 4 - (-4) = -2 \\a_5 &= -3a_4 - 3a_3 - a_2 = -3 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2) - 4 = 8\end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned}x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= 0 \\(x + 1)^3 &= 0 \\ \implies \underbrace{x = -1}_{3 \text{ veces}}\end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot n \cdot (-1)^n + C \cdot n^2 \cdot (-1)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned}A &= 2 \\-A - B - C &= -4 \\A + 2B + 4C &= 4\end{aligned}$$

cuya solución es $A = 2$, $B = 3$ y $C = -1$, es decir, $a_n = 2 \cdot (-1)^n + 3 \cdot n \cdot (-1)^n - n^2 \cdot (-1)^n$.

Comprobando obtenemos que $a_5 = 2 \cdot (-1)^5 + 3 \cdot 5 \cdot (-1)^5 - 5^2 \cdot (-1)^5 = 8$.

11) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$a_3 = 8a_2 - 16a_1 = 8 \cdot (-16) - 16 \cdot 4 = -192$$

$$a_4 = 8a_3 - 16a_2 = 8 \cdot (-192) - 16 \cdot (-16) = -1280$$

$$a_5 = 8a_4 - 16a_3 = 8 \cdot (-1280) - 16 \cdot (-192) = -7168$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 16 &= 0 \\ (x - 4)^2 &= 0 \\ \implies \underbrace{x = 4}_{2 \text{ veces}} \end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot 4^n + B \cdot n \cdot 4^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$4A + 4B = 4$$

$$16A + 32B = -16$$

cuya solución es $A = 3$ y $B = -2$, es decir, $a_n = 3 \cdot 4^n - 2 \cdot n \cdot 4^n$.

Comprobando obtenemos que $a_5 = 3 \cdot 4^5 - 2 \cdot 5 \cdot 4^5 = -7168$.

12) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$a_4 = -6a_3 - 12a_2 - 8a_1 = -6 \cdot (-48) - 12 \cdot 12 - 8 \cdot (-4) = 176$$

$$a_5 = -6a_4 - 12a_3 - 8a_2 = -6 \cdot 176 - 12 \cdot (-48) - 8 \cdot 12 = -576$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 &= 0 \\ (x + 2)^3 &= 0 \\ \implies \underbrace{x = -2}_{3 \text{ veces}} \end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot n \cdot (-2)^n + C \cdot n^2 \cdot (-2)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$-2A - 2B - 2C = -4$$

$$4A + 8B + 16C = 12$$

$$8A + 24B + 72C = -48$$

cuya solución es $A = 3$, $B = -2$ y $C = 1$, es decir, $a_n = 3 \cdot (-2)^n - 2 \cdot n \cdot (-2)^n + n^2 \cdot (-2)^n$.
Comprobando obtenemos que $a_5 = 3 \cdot (-2)^5 - 2 \cdot 5 \cdot (-2)^5 + 5^2 \cdot (-2)^5 = -576$.

13) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$\begin{aligned} a_3 &= 2a_2 + 4a_1 - 8a_0 = 2 \cdot (-16) + 4 \cdot (-4) - 8 \cdot (4) = -80 \\ a_4 &= 2a_3 + 4a_2 - 8a_1 = 2 \cdot (-80) + 4 \cdot (-16) - 8 \cdot (-4) = -192 \\ a_5 &= 2a_4 + 4a_3 - 8a_2 = 2 \cdot (-192) + 4 \cdot (-80) - 8 \cdot (-16) = -576 \end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - 4x + 8 &= 0 \\ (x + 2)(x - 2)^2 &= 0 \\ \implies \underbrace{x = 2}_{2 \text{ veces}} \quad \underbrace{x = -2}_{1 \text{ vez}} \end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot (2)^n + C \cdot n \cdot (2)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 4 \\ -2A + 2B + 2C &= -4 \\ 4A + 4B + 8C &= -16 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 1$, $B = 3$ y $C = -4$, es decir, $a_n = (-2)^n + 3 \cdot (2)^n - 4 \cdot n \cdot (2)^n$.
Comprobando obtenemos que $a_5 = (-2)^5 + 3 \cdot (2)^5 - 4 \cdot 5 \cdot (2)^5 = -576$.

14) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + 33a_1 + 63a_0 = 6 + 33 \cdot (3) + 63 \cdot (4) = 357 \\ a_4 &= a_3 + 33a_2 + 63a_1 = 357 + 33 \cdot (6) + 63 \cdot (3) = 744 \\ a_5 &= a_4 + 33a_3 + 63a_2 = 744 + 33 \cdot (357) + 63 \cdot (6) = 12903 \end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 33x - 63 &= 0 \\ (x - 7)(x + 3)^2 &= 0 \\ \implies \underbrace{x = -3}_{2 \text{ veces}} \quad \underbrace{x = 7}_{1 \text{ vez}} \end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot (7)^n + B \cdot (-3)^n + C \cdot n \cdot (-3)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 4 \\ 7A + -3B + -3C &= 3 \\ 49A + 9B + 18C &= 6 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{17}{5}$ y $C = -3$, es decir, $a_n = \frac{3}{5} \cdot (7)^n + \frac{17}{5} \cdot (-3)^n + -3 \cdot n \cdot (-3)^n$.

Comprobando obtenemos que $a_5 = \frac{3}{5} \cdot (7)^5 + \frac{17}{5} \cdot (-3)^5 + -3 \cdot 5 \cdot (-3)^5 = 12903$.

15) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$\begin{aligned} a_3 &= -4a_2 + 3a_1 + 18a_0 = -4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 18 \cdot (-1) = -35 \\ a_4 &= -4a_3 + 3a_2 + 18a_1 = -4 \cdot (-35) + 3 \cdot (2) + 18 \cdot (-3) = 92 \\ a_5 &= -4a_4 + 3a_3 + 18a_2 = -4 \cdot (92) + 3 \cdot (-35) + 18 \cdot (2) = -437 \end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned} x^3 + 4x^2 - 33x - 63 &= 0 \\ (x - 7)(x + 3)^2 &= 0 \\ \implies \underbrace{x = -3}_{2 \text{ veces}} \quad \underbrace{x = 7}_{1 \text{ vez}} \end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot (7)^n + B \cdot (-3)^n + C \cdot n \cdot (-3)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= 4 \\ 7A + -3B + -3C &= 3 \\ 49A + 9B + 18C &= 6 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{17}{5}$ y $C = -3$, es decir, $a_n = \frac{3}{5} \cdot (7)^n + \frac{17}{5} \cdot (-3)^n + -3 \cdot n \cdot (-3)^n$.

Comprobando obtenemos que $a_5 = \frac{3}{5} \cdot (7)^5 + \frac{17}{5} \cdot (-3)^5 + -3 \cdot 5 \cdot (-3)^5 = 12903$.

16) Utilizando la fórmula obtenemos el valor de a_5 :

$$\begin{aligned} a_3 &= 5a_2 - 3a_1 - 9a_0 = 5 \cdot 39 - 3 \cdot (-3) - 9 \cdot (-1) = 213 \\ a_4 &= 5a_3 - 3a_2 - 9a_1 = 5 \cdot 213 - 3 \cdot (39) - 9 \cdot (-3) = 975 \\ a_5 &= 5a_4 - 3a_3 - 9a_2 = 5 \cdot 975 - 3 \cdot (213) - 9 \cdot (39) = 3885 \end{aligned}$$

Para obtener la fórmula explícita, escribimos y resolvemos la ecuación característica:

$$\begin{aligned} x^3 - 5x^2 + 3x + 9 &= 0 \\ (x + 1)(x - 3)^2 &= 0 \\ \implies \underbrace{x = 3}_{2 \text{ veces}} \quad \underbrace{x = -1}_{1 \text{ vez}} \end{aligned}$$

Entonces: $a_n = A \cdot (-1)^n + B \cdot (3)^n + C \cdot n \cdot (3)^n$. Sustituyendo en los valores iniciales, se obtiene el sistema:

$$\begin{aligned} A + B &= -1 \\ -A + 3B + 3C &= -3 \\ A + 9B + 18C &= 39 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 3$, $B = -4$ y $C = 4$, es decir, $a_n = 3 \cdot (-1)^n + -4 \cdot (3)^n + 4 \cdot n \cdot (3)^n$.

Comprobando obtenemos que $3 \cdot (-1)^5 + -4 \cdot (3)^5 + 4 \cdot 5 \cdot (3)^5 = 3885$.

6.2.2

1) Se forma la ecuación característica:

$$\begin{aligned} (x + 3)^2 &= 0 \\ x^2 + 6x + 9 &= 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$\mathbf{U}_n = -6\mathbf{U}_{n-1} - 9\mathbf{U}_{n-2}$$

Usando la ecuación original se obtiene $\mathbf{U}_0 = 2$ y $\mathbf{U}_1 = 9$.

2) Se forma la ecuación característica, note que la constante sola debe estar multiplicada por 1^n :

$$\begin{aligned} (x - 3)(x - 1)^2 &= 0 \\ x^3 - 5x^2 + 7x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$\mathbf{U}_n = 5\mathbf{U}_{n-1} - 7\mathbf{U}_{n-2} + 3\mathbf{U}_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $\mathbf{U}_0 = 4$, $\mathbf{U}_1 = 9$ y $\mathbf{U}_2 = 122$.

3) Se forma la ecuación característica, note que la constante sola debe estar multiplicada por 1^n , además la solución asociada al término -2^n corresponde a 2 y **NO** a -2, pues no hay parentésis que indiquen lo contrario:

$$\begin{aligned} (x - 1)(x - 2)^2 &= 0 \\ x^3 - 5x^2 + 8x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$\mathbf{U}_n = 5\mathbf{U}_{n-1} - 8\mathbf{U}_{n-2} + 4\mathbf{U}_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $u_0 = -3$, $u_1 = -2$ y $u_2 = 2$.

4) Se forma la ecuación característica, note que la constante sola debe estar multiplicada por 1^n , además la solución asociada al término -2^n corresponde a 2 y la asociada al término $(-2)^n$ corresponde a -2 :

$$\begin{aligned}(x-1)(x-2)(x+2) &= 0 \\ x^3 - x^2 - 4x + 4 &= 0\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} - 4a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_0 = 5$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 5$.

5) Se forma la ecuación característica, note que la constante sola debe estar multiplicada por 1^n :

$$\begin{aligned}(x-4)^2(x-2)^2 &= 0 \\ x^4 - 12x^3 + 52x^2 - 96x + 64 &= 0\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = 12a_{n-1} - 52a_{n-2} + 96a_{n-3} - 64a_{n-4}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_1 = 18$, $a_2 = 51$, $a_3 = 132$ y $a_4 = 261$.

6) Se forma la ecuación característica, note que la constante sola debe estar multiplicada por 1^n :

$$\begin{aligned}(x-3)^2(x-1) &= 0 \\ x^3 - 7x^2 + 15x - 9 &= 0\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = 7a_{n-1} - 15a_{n-2} + 9a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_1 = 9$, $a_2 = 30$ y $a_3 = 111$.

7) Se forma la ecuación característica, dado que hay un término $n \cdot 5^{n+1}$, el factor n quiere decir que debe haber otro término con 5^n , por lo que tenemos:

$$(x - 5)^2(x - 3) = 0$$

$$x^3 - 13x^2 + 55x - 75 = 0$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = 13a_{n-1} - 55a_{n-2} + 75a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_0 = 1$, $a_1 = 53$ y $a_2 = 509$.

8) Se forma la ecuación característica, note que la constante sola debe estar multiplicada por 1^n :

$$(x - 2)^2(x - 1) = 0$$

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_2 = 22$, $a_3 = 58$ y $a_4 = 146$.

9) Se forma la ecuación característica, note que la constante sola debe estar multiplicada por 1^n :

$$(x + 1)^2(x - 1) = 0$$

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = -a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_1 = -6$, $a_2 = -3$ y $a_3 = -4$.

10) Se forma la ecuación característica:

$$(x + 1)^2(x - 2) = 0$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

Observe que falta el término de x^2 , por lo que no aparece el término con a_{n-1} . Así se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = 3a_{n-2} + 2a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_2 = -6$, $a_3 = -4$ y $a_4 = -22$.

11) Se forma la ecuación característica, note que la constante sola debe estar multiplicada por 1^n :

$$\begin{aligned}(x+2)^2(x-1) &= 0 \\ x^3 + 3x^2 - 4 &= 0\end{aligned}$$

Observe que falta el término de x , por lo que no aparece el término con a_{n-2} . Así se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_1 = -1$, $a_2 = -23$ y $a_3 = 69$.

12) Se forma la ecuación característica, note que tanto la constante como la n deben de estar multiplicadas por 1^n :

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x-3) &= 0 \\ x^3 - 5x^2 + 7x - 3 &= 0\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = 5a_{n-1} - 7a_{n-2} + 3a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_2 = -6$, $a_3 = -25$ y $a_4 = -80$.

13) Se forma la ecuación característica, note que la constante debe de estar multiplicadas por 1^n :

$$\begin{aligned}(x-5)(x-1)(x-3) &= 0 \\ x^3 - 9x^2 + 23x + 15 &= 0\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = 9a_{n-1} - 23a_{n-2} + 15a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_1 = -7$, $a_2 = -21$ y $a_3 = -123$.

14) Observe que: $a_n = 3 + 2n + 3^{n+1} = a_n = 3 + 2n + 3 \cdot 3^n$

Se forma la ecuación característica, note que la constante debe de estar multiplicadas por 1^n :

$$\begin{aligned}(x-1)^2(x-3) &= 0 \\ x^3 - 5x^2 + 7x - 3 &= 0\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = 5a_{n-1} - 7a_{n-2} + 3a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_2 = 14$, $a_3 = 36$ y $a_4 = 90$.

15) Se forma la ecuación característica, note que la constante debe de estar multiplicadas por 1^n :

$$\begin{aligned}(x - 2)(x - 1)(x - 3) &= 0 \\ x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= 0\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ y $a_2 = 15$.

16) Se forma la ecuación característica, note que la constante debe de estar multiplicadas por 1^n :

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 2)(x - 1) &= 0 \\ x^3 - x^2 - 4x - 4 &= 0\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} - 4a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_0 = 3$, $a_1 = -1$ y $a_2 = 3$.

17) Note que $a_n = 3 + 2^{n+1} - 3n2^n = a_n = 3 + 2 \cdot 2^n - 3n2^n$.



Se forma la ecuación característica, note que la constante debe de estar multiplicadas por 1^n :

$$\begin{aligned}(x - 2)^2(x - 1) &= 0 \\ x^3 - 3x^2 + 3x - 1 &= 0\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación recursiva:

$$a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$$

Usando la ecuación original se obtiene $a_0 = 5$, $a_1 = 1$ y $a_2 = 19$.

6.2.3   $a_n = 7^n + (-1)^{n+1}$

$$6.2.4 \text{ (R)} \quad a_n = -\frac{4}{15}(-2)^n + \frac{1}{10}3^n + \frac{7}{6}$$

$$6.2.5 \text{ (R)}$$

La ecuación característica es $(t+4)(t-2)^3 = t^4 - 2t^3 - 12t^2 + 40t - 32 = 0$.

Entonces $a_n = 2a_{n-1} + 12a_{n-2} - 40a_{n-3} + 32a_{n-4}$ con $a_0 = 4$, $a_1 = -4$, $a_3 = 48$ y $a_4 = -64$

$$6.2.6 \text{ (R)} \quad a_n = (4-2n)(3n) + 5n$$

Soluciones del Capítulo 7

7.2. Estructuras Algebraicas

7.2.1 (R) Como \mathbf{H} es un subgrupo se cumple que la operación $*$ es cerrada en \mathbf{H} , y como \mathbf{H} cumple la propiedad de los inversos, de debe dar que:

$$\begin{aligned} a^{-1} * a * b &\in \mathbf{H} \\ \implies e * b &\in \mathbf{H}, \quad \text{con } e \text{ el elemento neutro de } \mathbf{H} \\ \implies b &\in \mathbf{H} \end{aligned}$$

Por lo tanto $b \in \mathbf{H}$.

7.2.2 (R) Vamos a analizar cada una de las propiedades de una estructura algebraica: asociatividad, conmutatividad, elemento neutro e inversos.

- **Asociatividad:** Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ debe cumplir que $(A * B) * C = A * (B * C)$. Tenemos:

$$(A * B) * C = A * (B * C) \implies (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Lo cual es cierto por leyes de conjuntos. Por lo tanto $(\mathcal{P}(E), *)$ es asociativa.

- **Conmutatividad:** Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$ debe cumplir que $A * B = B * C$. Tenemos:

$$A * B = B * C \implies A \cup B = B \cup A$$

Lo cual es cierto por leyes de conjuntos. Por lo tanto $(\mathcal{P}(E), *)$ es conmutativa.

- **Elemento neutro:** Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$ debe cumplir que $A * B = A$. Tenemos:

$$A * B = A \cup B = A$$

Lo cual es cierto si y sólo si $B = \emptyset$. Por lo tanto $(\mathcal{P}(E), *)$ tiene elemento neutro (dado que la operación $*$ es conmutativa se omite la demostración de $B * A$).

- **Inversos:** Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$ y ε el elemento neutro de $(\mathcal{P}(E), \star)$ (en este caso se tiene que $\varepsilon = \emptyset$), debe cumplir que $A \star B = \varepsilon$. Tenemos:

$$A \star B = \varepsilon \implies A \cup B = \emptyset$$

Lo cual es cierto si y sólo si $A = \emptyset$ y $B = \emptyset$. Dado que A y B son dos conjuntos cualesquiera no necesariamente vacíos se concluye que $(\mathcal{P}(E), \star)$ no cumple la propiedad de los inversos.

Por lo tanto se concluye que $(\mathcal{P}(E), \star)$ es un monoide conmutativo.

7.2.3

Vamos a analizar cada una de las propiedades de una estructura algebraica: asociatividad, conmutatividad, elemento neutro e inversos.

- **Asociatividad:** Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ debe cumplir que $(A \star B) \star C = A \star (B \star C)$. Tenemos:

$$(A \star B) \star C = A \star (B \star C) \implies (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Lo cual es cierto por leyes de conjuntos. Por lo tanto $(\mathcal{P}(E), \star)$ es asociativa.

- **Conmutatividad:** Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$ debe cumplir que $A \star B = B \star A$. Tenemos:

$$A \star B = B \star A \implies A \cap B = B \cap A$$

Lo cual es cierto por leyes de conjuntos. Por lo tanto $(\mathcal{P}(E), \star)$ es conmutativa.

- **Elemento neutro:** Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$ debe cumplir que $A \star B = A$. Tenemos:

$$A \star B = A \cap B = A$$



Lo cual es cierto si y sólo si $B = \mathcal{U}$. Por lo tanto $(\mathcal{P}(E), \star)$ tiene elemento neutro (dado que la operación \star es conmutativa se omite la demostración de $B \star A$).

- **Inversos:** Sean $A, B \in \mathcal{P}(E)$ y ε el elemento neutro de $(\mathcal{P}(E), \star)$ (en este caso se tiene que $\varepsilon = \emptyset$), debe cumplir que $A \star B = \varepsilon$. Tenemos:

$$A \star B = \emptyset \implies A \cup B = \emptyset$$

Lo cual es cierto si y sólo si $B = \overline{A}$. Dado que A y B son dos conjuntos cualesquiera se concluye que $(\mathcal{P}(E), \star)$ no cumple la propiedad de los inversos.

Por lo tanto se concluye que $(\mathcal{P}(E), \star)$ es un monoide conmutativo.

7.2.4   Primero debemos calcular el elemento neutro asociado a (\mathbb{R}^*, \star) , para esto debe darse que:



$$\begin{array}{l|l} a * e = a & e * a = a \\ 5ae = a & 5ea = a \\ e = \frac{1}{5} & e = \frac{1}{5} \end{array}$$

Por lo tanto el elemento neutro asociado a (\mathbb{R}^*, \star) corresponde a $\frac{1}{5}$.

Ahora, por definición de elemento involutivo, debe cumplirse que:

$$\begin{aligned} a * a = e &\implies 5aa = \frac{1}{5} \\ &\implies a^2 = \frac{1}{25} \\ &\implies a = \sqrt{\frac{1}{25}} \\ &\implies a = \frac{1}{5} \end{aligned}$$



Por lo tanto el único elemento involutivo de (\mathbb{R}^*, \star) corresponde a $\frac{1}{5}$.

7.2.5   Como (\mathbf{G}, \star) es un grupo, se cumple que posee elementos inversos. Así:

$$\begin{aligned} b * c * x^2 * a = c * x * a &\implies b * c * x^2 * a * a^{-1} = c * x * a * a^{-1} \\ &\implies b * c * x^2 * e = c * x * e \\ &\implies b * c * x^2 = c * x \\ &\implies b * c * x * x = c * x \\ &\implies b * c * x * x * x^{-1} = c * x * x^{-1} \\ &\implies b * c * x * e = c * e \\ &\implies b * c * x = c \\ &\implies b^{-1} * b * c * x = b^{-1} * c \\ &\implies e * c * x = b^{-1} * c \\ &\implies c * x = b^{-1} * c \\ &\implies c^{-1} * c * x = c^{-1} * b^{-1} * c \\ &\implies e * x = c^{-1} * b^{-1} * c \\ &\implies x = c^{-1} * b^{-1} * c \end{aligned}$$

Por lo tanto el valor de $x = c^{-1} \star b^{-1} \star c$.

7.2. Grupos

7.2.6   Para determinar si un grupo es abeliano debemos mostrar que es asociativo, conmutativo, tiene elemento neutro e inversos.

- **Asociatividad:** Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R} \perp \mathbb{R}^+$, tenemos que demostrar que:

$$[(a, b) \perp (c, d)] \perp (e, f) = (a, b) \perp [(c, d) \perp (e, f)]$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{l|l} [(a, b) \perp (c, d)] \perp (e, f) & (a, b) \perp [(c, d) \perp (e, f)] \\ (a + c + 5, 3bd) \perp (e, f) & (a, b) \perp (c + e + 5, 3df) \\ (a + c + 5 + e + 5, 3(3bd)f) & (a + c + e + 5 + 5, 3b(3df)) \\ (a + c + e + 10, 9bdf) & (a + c + e + 10, 9bdf) \end{array}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R} \perp \mathbb{R}^+, \perp)$ es asociativa.

- **Conmutatividad:** Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \perp \mathbb{R}^+$, tenemos que demostrar que:

$$(a, b) \perp (c, d) = (c, d) \perp (a, b)$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{l|l} (a, b) \perp (c, d) & (c, d) \perp (a, b) \\ (a + c + 5, 3bd) & (c + a + 5, 3db) \\ (a + c + 5, 3bd) & (a + c + 5, 3bd) \end{array}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R} \perp \mathbb{R}^+, \perp)$ es conmutativa.

- **Elemento neutro:** Sean $(a, b), (e_1, e_2) \in \mathbb{R} \perp \mathbb{R}^+$, tenemos que demostrar que:

$$(e_1, e_2) \perp (a, b) = (a, b) \perp (e_1, e_2) = (a, b)$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{array}{l} (e_1, e_2) \perp (a, b) = (a, b) \\ (e_1 + a + 5, 3e_2b) = (a, b) \\ e_1 + a + 5 = a \quad \wedge \quad 3e_2b = b \\ e_1 = -5 \quad \wedge \quad e_2 = \frac{1}{3} \end{array}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R} \perp \mathbb{R}^+, \perp)$ tiene elemento neutro y este corresponde a $\left(-5, \frac{1}{3}\right)$.

- **Elemento inverso:** Sea $(a, b) \in \mathbb{R} \perp \mathbb{R}^+$, tenemos que demostrar que:

$$(i_1, i_2) \perp (a, b) = (a, b) \perp (i_1, i_2) = \left(-5, \frac{1}{3}\right)$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$(a, b) \perp (i_1, i_2) = \left(-5, \frac{1}{3}\right)$$

$$(a + i_1 + 5, 3bi_2) = \left(-5, \frac{1}{3}\right)$$

$$a + i_1 + 5 = -5 \quad \wedge \quad 3bi_2 = \frac{1}{3}$$

$$i_1 = -10 - a \quad \wedge \quad i_2 = \frac{1}{9b}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R} \perp \mathbb{R}^+, \perp)$ tiene inversos y este corresponde a $\left(-10 - a, \frac{1}{9b}\right)$.

Por lo tanto, hemos demostrado que $(\mathbb{R} \perp \mathbb{R}^+, \perp)$ es un grupo abeliano.

7.2.7

Para determinar si un grupo es abeliano debemos mostrar que es asociativo, conmutativo, tiene elemento neutro e inversos.

- **Asociatividad:** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

Así tenemos:

$(a \otimes b) \otimes c$	$a \otimes (b \otimes c)$
$7ab \otimes c$	$a \otimes 7bc$
$7(7ab)c$	$7a(7bc)$
$49abc$	$49abc$

Por lo tanto, (\mathbb{R}^*, \otimes) es asociativa.

- **Conmutatividad:** Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$a \otimes b = b \otimes a$$

Así tenemos:

$a \otimes b$	$b \otimes a$
$7ab$	$7ba$
$7ab$	$7ab$

Por lo tanto, (\mathbb{R}^*, \otimes) es conmutativa.

- **Elemento neutro:** Sean $a, e \in \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$e \otimes a = a \otimes e = a$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned} e \otimes a &= a \\ 7ea &= a \\ e &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

Por lo tanto, (\mathbb{R}^*, \otimes) tiene elemento neutro y este corresponde a $\frac{1}{7}$.

- **Elemento inverso:** Sea $a, i \in \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$i \otimes a = a \otimes i = \frac{1}{7}$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned} i \otimes a &= \frac{1}{7} \\ 7ia &= \frac{1}{7} \\ i &= \frac{1}{49a} \end{aligned}$$

Por lo tanto, (\mathbb{R}^*, \otimes) tiene inversos y este corresponde a $\frac{1}{49a}$.

Por lo tanto, hemos demostrado que (\mathbb{R}^*, \otimes) es un grupo abeliano.

Ahora vamos a calcular $2 \otimes 3 \otimes 5^{-1}$:

$$\begin{aligned} 2 \otimes 3 \otimes 5^{-1} &= 7(2)(3) \otimes 5^{-1} \\ &= 42 \otimes \frac{1}{245} \\ &= 7(42) \left(\frac{1}{245} \right) \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

7.2.8   Se omite.

7.2.9  

a.) Como b y d son no nulos entonces $2bd \neq 0$, por lo que la operación es cerrada.

- b.) Asociatividad: Verifique que efectivamente $(a, b) \otimes [(c, d) \otimes (p, q)]$ y $[(a, b) \otimes (c, d)] \otimes (p, q)$ dan el mismo resultado: $(a + c + p - 8, 4bdq)$
- c.) Neutro $(4, 1/2)$
- d.) Inversos $(a, b)^{-1} = (8 + a, 1/(4b))$
- e.) Conmutatividad: Verifique que efectivamente $(a, b) \otimes (c, d)$ y $(c, d) \otimes (a, b)$ dan el mismo resultado: $(a + c - 4, 2bd)$

$$(2, -1)^2 \otimes \left[\left(0, \frac{1}{3}\right) \otimes (1, -1)^{-1} \right] = \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$$

7.2.10   Se omite.

7.2.11   Se omite.

7.2.12   Se omite.

7.2.13   Se omite.

7.2.14   Se omite.

7.2.15  

- a.) Calcule la fórmula de $(a, b)^{-1}$

Elemento inverso: Sea $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, tenemos que demostrar que:

$$(i_1, i_2) \otimes (a, b) = (a, b) \otimes (i_1, i_2) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:



$$\begin{aligned} (a, b) \otimes (i_1, i_2) &= \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ (2a \cdot i_1, b + i_2 - 1) &= \left(\frac{1}{2}, 1\right) \\ 2a \cdot i_1 = \frac{1}{2} &\quad \wedge \quad b + i_2 - 1 = 1 \\ i_1 = \frac{1}{4a} &\quad \wedge \quad i_2 = 2 - b \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \otimes)$ tiene inversos y este corresponde a $\left(\frac{1}{4a}, 2 - b\right)$.

b.) Calcule $[(1,5)^3 \otimes (-2,3)]^{-2}$.

Tenemos:

$$\begin{aligned}
 [(1,5)^3 \otimes (-2,3)]^{-2} &= [(1,5) \otimes (1,5) \otimes (1,5) \otimes (-2,3)]^{-2} \\
 &= [\{(1,5) \otimes (1,5)\} \otimes (1,5) \otimes (-2,3)]^{-2} \\
 &= [(2,9) \otimes (1,5) \otimes (-2,3)]^{-2} \\
 &= [(4,13) \otimes (-2,3)]^{-2} \\
 &= (-16,15)^{-2} \\
 &= [(-16,15)^{-1}]^2 \\
 &= \left(\frac{-1}{64}, -13\right)^2 \\
 &= \left(\frac{1}{2^{11}}, -27\right)
 \end{aligned}$$

7.2.16   Para determinar si un grupo es abeliano debemos mostrar que es asociativo, conmutativo, tiene elemento neutro e inversos.

- **Asociatividad:** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$[a \otimes b] \otimes c = a \otimes [b \otimes c]$$

Así tenemos:

$[a \otimes b] \otimes c$	$a \otimes [b \otimes c]$
$6ab \otimes c$	$a \otimes 6bc$
$6 \cdot 6ab \cdot c$	$6a \cdot 6bc$
$36abc$	$36abc$

Por lo tanto, es asociativa.

- **Conmutatividad:** Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$a \otimes b = b \otimes a$$

Así tenemos:

$a \otimes b$	$b \otimes a$
$6ab$	$6ba$
$6ab$	$6ab$

Por lo tanto, es conmutativa.

- **Elemento neutro:** Sean $a, e \in \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$e \otimes a = a \otimes e = a$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned} e \otimes a &= a \\ 6ea &= a \\ e &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe elemento neutro y este corresponde a $\frac{1}{6}$.

- **Elemento inverso:** Sea $a \in \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$i \otimes a = a \otimes i = \frac{1}{6}$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned} a \otimes i &= \frac{1}{6} \\ 6ai &= \frac{1}{6} \\ i &= \frac{1}{36a} \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe inverso y este corresponde a $i = \frac{1}{36a}$.

Por lo tanto, hemos demostrado que es un grupo abeliano.

7.2.17

Para determinar si un grupo es abeliano debemos mostrar que es asociativo, conmutativo, tiene elemento neutro e inversos.

- **Asociatividad:** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, tenemos que demostrar que:

$$[a \star b] \star c = a \star [b \star c]$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{l|l}
 [a \star b] \star c & a \star [b \star c] \\
 (a + b + 5) \star c & a \star (b + c + 5) \\
 (a + b + 5) + c + 5 & a + (b + c + 5) + 5 \\
 a + b + c + 10 & a + b + c + 10
 \end{array}$$

Por lo tanto, es asociativa.

- **Conmutatividad:** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que demostrar que:

$$a \star b = b \star a$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{l|l}
 a \star b & b \star a \\
 a + b + 5 & b + a + 5 \\
 a + b + 5 & a + b + 5
 \end{array}$$

Por lo tanto, es conmutativa.

- **Elemento neutro:** Sean $a, e \in \mathbb{R}^*+$, tenemos que demostrar que:

$$e \star a = a \star e = a$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{array}{rcl}
 e \star a & = & a \\
 e + a + 5 & = & a \\
 e & = & -5
 \end{array}$$

Por lo tanto, existe elemento neutro y este corresponde a -5 .

- **Elemento inverso:** Sea $a \in \mathbb{R}$, tenemos que demostrar que:

$$i \star a = a \star i = -5$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{array}{rcl}
 a \star i & = & -5 \\
 a + i + 5 & = & -5 \\
 i & = & -10 - a
 \end{array}$$

Por lo tanto, existe inverso y este corresponde a $i = -10 - a$.

Por lo tanto, hemos demostrado que es un grupo abeliano.

7.2.18

a.) el elemento neutro;

Sean $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$, tenemos que demostrar que:

$$(e_1, e_2) \otimes (a, b) = (a, b) \otimes (e_1, e_2) = (a, b)$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned} (e_1, e_2) \otimes (a, b) &= (a, b) \\ (e_1 + a - 1, 2e_2b) &= (a, b) \\ e_1 + a - 1 = a &\quad \wedge \quad 2e_2b = b \\ e_1 = 1 &\quad \wedge \quad e_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ tiene elemento neutro y este corresponde a $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

b.) la fórmula del inverso de (a, b) , es decir $(a, b)^{-1} = (i_1, i_2)$.



Elemento inverso: Sea $(a, b) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$, tenemos que demostrar que:

$$(i_1, i_2) \otimes (a, b) = (a, b) \otimes (i_1, i_2) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned} (a, b) \otimes (i_1, i_2) &= \left(1, \frac{1}{2}\right) \\ (a + i_1 - 1, 2bi_2) &= \left(1, \frac{1}{2}\right) \\ a + i_1 - 1 = 1 &\quad \wedge \quad 2bi_2 = \frac{1}{2} \\ i_1 = 2 - a &\quad \wedge \quad i_2 = \frac{1}{4b} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \otimes)$ tiene inversos y este corresponde a $\left(2 - a, \frac{1}{4b}\right)$.

7.2.19   Para determinar si un grupo es abeliano debemos mostrar que es asociativo, conmutativo, tiene elemento neutro e inversos.

- **Asociatividad:** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, tenemos que demostrar que:

$$[a \star b] \star c = a \star [b \star c]$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{l|l} [a \star b] \star c & a \star [b \star c] \\ (a + b - \frac{1}{2}) \star c & a \star (b + c - \frac{1}{2}) \\ (a + b - \frac{1}{2}) + c - \frac{1}{2} & a + (b + c - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \\ a + b + c - 1 & a + b + c - 1 \end{array}$$

Por lo tanto, es asociativa.

- **Conmutatividad:** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que demostrar que:

$$a \star b = b \star a$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{l|l} a \star b & b \star a \\ a + b - \frac{1}{2} & b + a - \frac{1}{2} \\ a + b - \frac{1}{2} & a + b - \frac{1}{2} \end{array}$$

Por lo tanto, es conmutativa.

- **Elemento neutro:** Sean $a, e \in \mathbb{R}^*+$, tenemos que demostrar que:

$$e \star a = a \star e = a$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{array}{l} e \star a = a \\ e + a - \frac{1}{2} = a \\ e = \frac{1}{2} \end{array}$$

Por lo tanto, existe elemento neutro y este corresponde a $\frac{1}{2}$.

- **Elemento inverso:** Sea $a \in \mathbb{R}$, tenemos que demostrar que:

$$i * a = a * i = \frac{1}{2}$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:



$$a * i = \frac{1}{2}$$

$$a + i - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$i = 1 - a$$

Por lo tanto, existe inverso y este corresponde a $i = 1 - a$.

Por lo tanto, hemos demostrado que es un grupo abeliano.

7.2.20   \implies Se asume que $(\mathbf{G}, *)$ es grupo abeliano y debemos probar que $(a * b)^2 = a^2 * b^2$, para todos $a, b \in G$.

$$\begin{aligned} (a * b)^2 &= (a * b) * (a * b) \\ &= a * b * a * b \\ &= a * a * b * b \text{ por ser abeliano} \\ &= a^2 * b^2 \end{aligned}$$

\Leftarrow Es necesario mostrar que $a * b = b * a$, para todos $a, b \in G$.

Por hipótesis $(a * b)^2 = a^2 * b^2$, es decir, $(a * b) * (a * b) = (a * b * a * b) = a * a * b * b$ y por ser grupo, existen a^{-1} y b^{-1} . Luego

$$\begin{aligned} a^{-1} * (a * b * a * b) * b^{-1} &= a^{-1} * (a * a * b * b) * b^{-1} \\ (a^{-1} * a) * (b * a) * (b * b^{-1}) &= (a^{-1} * a) * (a * b) * (b * b^{-1}) \\ (b * a) &= (a * b) \end{aligned}$$

7.2.21  

1) Para determinar si un grupo es abeliano debemos mostrar que es asociativo, conmutativo, tiene elemento neutro e inversos.

- **Asociatividad:** Sean $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$[(a, b) \circledast (c, d)] \circledast (e, f) = (a, b) \circledast [(c, d) \circledast (e, f)]$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{l|l} [(a, b) \circledast (c, d)] \circledast (e, f) & (a, b) \circledast [(c, d) \circledast (e, f)] \\ \left(a + c - 3, \frac{bd}{2}\right) \circledast (e, f) & (a, b) \circledast \left(c + e - 3, \frac{df}{2}\right) \\ \left(a + c - 3 + e - 3, \frac{bdf}{4}\right) & \left(a + c + e - 3 - 3, \frac{bdf}{4}\right) \\ \left(a + c + e - 6, \frac{bdf}{4}\right) & \left(a + c + e - 6, \frac{bdf}{4}\right) \end{array}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \circledast)$ es asociativa.

- **Conmutatividad:** Sean $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$(a, b) \circledast (c, d) = (c, d) \circledast (a, b)$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{l|l} (a, b) \circledast (c, d) & (c, d) \circledast (a, b) \\ \left(a + c - 3, \frac{bd}{2}\right) & \left(c + 1 - 3, \frac{db}{2}\right) \\ \left(a + c - 3, \frac{bd}{2}\right) & \left(a + c - 3, \frac{bd}{2}\right) \end{array}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \circledast)$ es conmutativa.

- **Elemento neutro:** Sean $(a, b), (e_1, e_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$(e_1, e_2) \circledast (a, b) = (a, b) \circledast (e_1, e_2) = (a, b)$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned} (e_1, e_2) \circledast (a, b) &= (a, b) \\ (e_1 + a - 3, e_2 b / 2) &= (a, b) \\ e_1 + a - 3 = a &\wedge \frac{e_2 b}{2} = b \\ e_1 = 3 &\wedge e_2 = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \circledast)$ tiene elemento neutro y este corresponde a $(3, 2)$.

- **Elemento inverso:** Sea $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, tenemos que demostrar que:

$$(i_1, i_2) \circledast (a, b) = (a, b) \circledast (i_1, i_2) = (3, 2)$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned} (a, b) \circledast (i_1, i_2) &= (3, 2) \\ \left(a + i_1 - 3, \frac{bi_2}{2} \right) &= (3, 2) \\ a + i_1 - 3 = 3 &\quad \wedge \quad \frac{bi_2}{2} = 2 \\ i_1 = 6 - a &\quad \wedge \quad i_2 = \frac{4}{b} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \circledast)$ tiene inversos y este corresponde a $\left(6 - a, \frac{4}{b} \right)$.

Por lo tanto, hemos demostrado que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \circledast)$ es un grupo abeliano.

2) Tenemos:

$$\begin{aligned} (5, 2)^{-2} \circledast [(3, 7) \circledast (5, 2)^{-1}]^{-1} &= [(5, 2)^{-1}]^2 \circledast [(3, 7) \circledast (5, 2)^{-1}]^{-1} \\ &= (1, 2)^2 \circledast [(3, 7) \circledast (1, 2)]^{-1} \\ &= (1, 2) \circledast (1, 2) \circledast (1, 7)^{-1} \\ &= (-1, 2) \circledast \left(5, \frac{4}{7} \right) \\ &= \left(1, \frac{4}{7} \right) \end{aligned}$$

3) No es grupo abeliano, pues como el inverso es $\left(6 - a, \frac{4}{b} \right)$, debe cumplirse que $b \neq 0$, por lo tanto el grupo debe ser $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \circledast)$

7.2.22

Para determinar si un grupo es abeliano debemos mostrar que es asociativo, conmutativo, tiene elemento neutro e inversos.

- **Asociatividad:** Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, tenemos que demostrar que:

$$(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{c|c} (a \perp b) \perp c & a \perp (b \perp c) \\ \frac{\sqrt[3]{a^3 + b^3} \perp c}{\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{a^3 + b^3}\right)^3 + c^3}} & a \perp \frac{\sqrt[3]{b^3 + c^3}}{\sqrt[3]{a^3 + \left(\sqrt[3]{b^3 + c^3}\right)^3}} \\ \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3} & \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3} \end{array}$$

Por lo tanto, (\mathbb{R}, \perp) es asociativa.

- **Conmutatividad:** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, tenemos que demostrar que:

$$a \perp b = b \perp a$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{l|l} a \perp b & b \perp a \\ \hline \sqrt[3]{a^3 + b^3} & \sqrt[3]{b^3 + a^3} \\ \sqrt[3]{a^3 + b^3} & \sqrt[3]{a^3 + b^3} \end{array}$$

Por lo tanto, (\mathbb{R}, \perp) es conmutativa.

- **Elemento neutro:** Sean $a, e \in \mathbb{R}$, tenemos que demostrar que:

$$e \perp a = a \perp e = a$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned} e \perp a &= a \\ \sqrt[3]{e^3 + a^3} &= a \\ e^3 + a^3 &= a^3 \\ e^3 &= 0 \\ e &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, (\mathbb{R}, \perp) tiene elemento neutro y este corresponde a 0.

- **Elemento inverso:** Sea $a, i \in \mathbb{R}$, tenemos que demostrar que:

$$i \perp a = a \perp i = 0$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:



$$\begin{aligned} i \perp a &= 0 \\ \sqrt[3]{i^3 + a^3} &= 0 \\ i^3 + a^3 &= 0 \\ i^3 &= -a^3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, (\mathbb{R}, \perp) tiene inversos y este corresponde a: $-a^3$.

Por lo tanto, hemos demostrado que (\mathbb{R}^*, \otimes) es un grupo abeliano.

Ahora vamos a calcular $5^{-2} \perp 2^3$:



$$\begin{aligned}
 5^{-2} \perp 2^3 &= (5^{-1})^2 \perp (2 \perp 2 \perp 2) \\
 &= (-125)^2 \perp (\sqrt[3]{16} \perp 2) \\
 &= (-125) \perp (-125) \perp \sqrt[3]{24} \\
 &= \sqrt[3]{-3906250} \perp \sqrt[3]{24} \\
 &= \sqrt[3]{-3906226} \\
 &\approx -157.4898
 \end{aligned}$$

7.2.23   Dado que $(\mathbf{G}, *)$ es un grupo, sólo falta demostrar que $(\mathbf{G}, *)$ es conmutativa.

Sea $x, y \in G$, se cumple que $\exists n, m \in \mathbb{Z}$, tal que $x = a^n$ y $y = a^m$. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
 x * y &= a^n * a^m \\
 &= a^{(n + m)} \\
 &= a^{(m + n)} \\
 &= a^m * a^n \\
 &= y * x
 \end{aligned}$$

Por lo tanto $(\mathbf{G}, *)$ es un grupo abeliano.

7.2.24   Vamos a analizar cada una de las propiedades de una estructura algebraica: asociatividad, conmutatividad, elemento neutro e inversos.

- **Asociatividad:** Sean $a, b, c \in \mathbb{N}$, tenemos que demostrar que:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

Así tenemos:

$(a * b) * c$	$a * (b * c)$
$(a + b + ab) * c$	$a * (b + c + bc)$
$a + b + ab + c + (a + b + ab)c$	$a + b + c + bc + a(b + c + bc)$
$a + b + ab + c + ac + bc + abc$	$a + b + c + bc + ab + ac + abc$
$a + b + c + ab + ac + bc + abc$	$a + b + c + bc + ab + ac + abc$
$a + b + c + ab + ac + bc + abc$	$a + b + c + ab + ac + bc + abc$

Por lo tanto, $(\mathbb{N}, *)$ es asociativa.

- **Conmutatividad:** Sean $a, b \in \mathbb{N}$, tenemos que demostrar que:

$$a * b = b * a$$

Así tenemos:

$$\begin{array}{r|l} a * b & b * a \\ a + b + ab & b + a + ba \\ a + b + ab & a + b + ab \end{array}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{N}, *)$ es conmutativa.

- **Elemento neutro:** Sean $a, e \in \mathbb{N}$, tenemos que demostrar que:

$$e * a = a * e = a$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned} e * a &= a \\ e + a + ea &= a \\ e(1 + a) &= 0 \\ e &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\mathbb{N}, *)$ tiene elemento neutro y este corresponde a 0.

- **Elemento inverso:** Sea $a, i \in \mathbb{N}$, tenemos que demostrar que:

$$i * a = a * i = 0$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned} i * a &= 0 \\ i + a + ia &= 0 \\ i(1 + a) &= -a \\ i &= \frac{-a}{1 + a} \end{aligned}$$

Sin embargo, note que $\frac{-a}{1 + a} \notin \mathbb{N}$, por lo tanto $(\mathbb{N}, *)$ no tiene inversos.

De acuerdo a las propiedades que cumple $(\mathbb{N}, *)$ se dice que es un monoide conmutativo.

7.2.25

- 1) Sean $a, e \in (\mathbb{R}^+,)$ tenemos que demostrar que:

$$e * a = a * e = a$$

Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned}e * a &= a \\ \frac{ea}{2} &= a \\ e &= 2\end{aligned}$$

Por lo tanto el elemento neutro de $(\mathbb{R}^+, *)$ corresponde a: 2.

2) Sea $a, i \in \mathbb{N}$, tenemos que demostrar que:

$$i * a = a * i = 2$$



Dado que la operación es conmutativa sólo se calculará un lado, así tenemos:

$$\begin{aligned}i * a &= 2 \\ \frac{ia}{2} &= 2 \\ i &= \frac{4}{a}\end{aligned}$$

Por lo tanto el elemento inverso de $(\mathbb{R}^+, *)$ corresponde a: $\frac{4}{a}$.

3) Tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} * \left[3^2 * \frac{4}{7}\right]^{-1} &= \frac{2}{3} * \left[(3 * 3) * \frac{4}{7}\right]^{-1} \\ &= \frac{2}{3} * \left[\frac{9}{2} * \frac{4}{7}\right]^{-1} \\ &= \frac{2}{3} * \left[\frac{9}{7}\right]^{-1} \\ &= \frac{2}{3} * \frac{28}{9} \\ &= \frac{28}{27}\end{aligned}$$

7.2.26   Claramente la operación es cerrada pues $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b & b \\ b & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2ab & 2ab \\ 2ab & 2ab \end{bmatrix}$ nos da una matriz con sus entradas iguales y no nulas.

El neutro es $e = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. Inversos: $\begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4a & 1/4a \\ 1/4a & 1/4a \end{bmatrix}$.

Claramente es producto es conmutativo en \mathbf{G}

7.2.27  

1)

- **Elemento neutro:** corresponde a c .
- **Elementos inversos:** se tiene que $a^{-1} = b$, $b^{-1} = a$, $c^{-1} = c$, $m^{-1} = 0$, $n^{-1} = n$ y $o^{-1} = m$.

2) Si es subgrupo por que c es neutro y a la vez inverso de él mismo.

3) Si es subgrupo.

7.2.28  

1)

- **Elemento neutro:** corresponde a $e = \dot{1}$.
- **Elementos inversos:** se tiene que $(\dot{1})^{-1} = \dot{1}$, $(\dot{2})^{-1} = \dot{6}$, $(\dot{3})^{-1} = \dot{4}$, $(\dot{4})^{-1} = \dot{3}$, $(\dot{5})^{-1} = \dot{9}$, $(\dot{6})^{-1} = \dot{2}$, $(\dot{7})^{-1} = \dot{8}$, $(\dot{8})^{-1} = \dot{7}$, $(\dot{9})^{-1} = \dot{5}$, $(\dot{10})^{-1} = \dot{10}$.

2) Tenemos:

$$\begin{aligned}
 [\dot{5}^{-2} \circ \dot{6}^3]^{-1} \circ (\dot{2} \circ \dot{8})^4 &= [(\dot{5}^2)^{-1} \circ \dot{6}^3]^{-1} \circ (\dot{5})^4 \\
 &= [(\dot{3})^{-1} \circ \dot{7}]^{-1} \circ \dot{9} \\
 &= [\dot{4} \circ \dot{7}]^{-1} \circ \dot{9} \\
 &= [\dot{6}]^{-1} \circ \dot{9} \\
 &= \dot{2} \circ \dot{9} \\
 &= \dot{7}
 \end{aligned}$$

3) Tenemos:

$$\begin{aligned}
 [(\dot{7})^6 \circ \dot{4}]^{-4} \circ [\dot{9} \circ (\dot{3})^{-7}]^4 &= [(\dot{7})^6 \circ \dot{4}]^{-4} \circ [\dot{9} \circ (\dot{3})^{-7}]^4 \\
 &= [\dot{4} \circ \dot{4}]^{-4} \circ [\dot{9} \circ (\dot{3}^7)^{-1}]^4 \\
 &= (\dot{5})^{-4} \circ [\dot{9} \circ (\dot{9})^{-1}]^4 \\
 &= (\dot{5}^4)^{-1} \circ [\dot{9} \circ \dot{5}]^4 \\
 &= (\dot{9})^{-1} \circ [\dot{1}]^4 \\
 &= \dot{5} \circ \dot{1} \\
 &= \dot{5}
 \end{aligned}$$

4) Observe que el orden de \mathbb{Z}_{11}^* es 10. Del Teorema de Lagrange se sabe que el orden del subgrupo puede ser 1, 2, 5 o 10. Además note que cada uno de los subgrupos debe contener al elemento neutro ($\dot{1}$) y a los inversos de cada elemento, además de ser cerrado; por eso los subgrupos son:

- **Orden 1:** $\{\dot{1}\}$
- **Orden 2:** $\{\dot{1}, \dot{10}\}$
- **Orden 5:** $\{\dot{1}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{9}\}$
- **Orden 11:** \mathbb{Z}_{11}^*

7.2.29  

\odot	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{1}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{6}$	$\dot{1}$	$\dot{3}$	$\dot{5}$
$\dot{3}$	$\dot{3}$	$\dot{6}$	$\dot{2}$	$\dot{5}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$
$\dot{4}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{5}$	$\dot{2}$	$\dot{6}$	$\dot{3}$
$\dot{5}$	$\dot{5}$	$\dot{3}$	$\dot{1}$	$\dot{6}$	$\dot{4}$	$\dot{2}$
$\dot{6}$	$\dot{6}$	$\dot{5}$	$\dot{4}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$	$\dot{1}$

2)

- **Elemento neutro:** corresponde a $e = \dot{1}$.
- **Elementos inversos:** se tiene que $(\dot{1})^{-1} = \dot{1}$, $(\dot{2})^{-1} = \dot{4}$, $(\dot{3})^{-1} = \dot{5}$, $(\dot{4})^{-1} = \dot{2}$, $(\dot{5})^{-1} = \dot{3}$, $(\dot{6})^{-1} = \dot{6}$.

3)

$$\begin{aligned}
 [(\dot{4})^{-2} \odot \dot{5}] \odot (\dot{3})^{30} &= [(\dot{4}^2)^{-1} \odot \dot{5}] \odot (\dot{3}^6)^5 \\
 &= [(\dot{2})^{-1} \odot \dot{5}] \odot (\dot{1})^5 \\
 &= [\dot{4} \odot \dot{5}] \odot (\dot{1}) \\
 &= [\dot{6}] \odot (\dot{1}) \\
 &= \dot{6}
 \end{aligned}$$

4) Observe que el orden de \mathbb{Z}_7^* es 6. Del Teorema de Lagrange se sabe que el orden del subgrupo puede ser 1, 2, 3 o 6. Además note que cada uno de los subgrupos debe contener al elemento neutro ($\dot{1}$) y a los inversos de cada elemento, además de ser cerrado; por eso los subgrupos son:

- **Orden 1:** $\{\dot{1}\}$
- **Orden 2:** $\{\dot{1}, \dot{6}\}$
- **Orden 3:** $\{\dot{1}, \dot{2}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{9}\}$

- **Orden 6:** \mathbb{Z}_7^*

7.2.30  

- **Elemento neutro:** corresponde a $e = \dot{0}$.
- **Elementos inversos:** se tiene que:

$$\begin{aligned} (\dot{0})^{-1} = \dot{0}, \quad (\dot{1})^{-1} = \dot{7}, \quad (\dot{2})^{-1} = \dot{6}, \quad (\dot{3})^{-1} = \dot{5}, \quad (\dot{5})^{-1} = \dot{9}, \quad (\dot{6})^{-1} = \dot{2}, \quad (\dot{4})^{-1} = \dot{4}, \quad (\dot{5})^{-1} = \dot{3}, \\ (\dot{6})^{-1} = \dot{2}, \quad (\dot{7})^{-1} = \dot{1}. \end{aligned}$$

- **Subgrupos:** Observe que el orden de \mathbb{Z}_8 es 8. Del Teorema de Lagrange se sabe que el orden del subgrupo puede ser 1, 2, 4 o 8. Además note que cada uno de los subgrupos debe contener al elemento neutro ($\dot{0}$) y a los inversos de cada elemento, además de ser cerrado; por eso los subgrupos son:

- **Orden 1:** $\{\dot{0}\}$
- **Orden 2:** $\{\dot{0}, \dot{4}\}$
- **Orden 4:** $\{\dot{0}, \dot{2}, \dot{4}, \dot{6}\}$
- **Orden 8:** \mathbb{Z}_8

7.2.32  

- 1) Neutro es c , ahora ya puede calcular los inversos. Por ejemplo $t^{-1} = e$
- 2) $(m^{-2} * 7)^2 = i^2 = s$ y $(a * t^{-1})^{1000} = d^{1000} = \underbrace{d^2 * d^2 * \dots * d^2}_{500 \text{ veces}} = c * c * \dots * c = c$

7.2.33  

- 1) Se omite.
- 2) Se omite.

7.2.34   Se omite.7.2.35   Se omite.7.2.36  

- 1) Se omite.
- 2) Se omite.
- 3) Se omite.
- 4) Se omite.

7.2.37  

- 1) Dado que (A, \perp) es asociativo, sólo hay que demostrar la conmutatividad, existencia del elemento neutro e inversos.

- **Conmutatividad:** Se cumple pues la tabla es simétrica.
- **Elemento neutro:** corresponde a α .
- **Elementos inversos:** se tiene que $\alpha^{-1} = \alpha$, $\beta^{-1} = \theta$, $\varepsilon^{-1} = \lambda$, $\theta^{-1} = \beta$, $\lambda^{-1} = \varepsilon$ y $\omega^{-1} = \omega$.

2) Tenemos

$$\begin{aligned}
 [(\alpha \perp \beta^{-1})^{-1} \perp (\lambda^3 \perp \theta)]^{-2} &= [(\alpha \perp \theta)^{-1} \perp (\lambda \perp \lambda \perp \lambda \perp \theta)]^{-2} \\
 &= [(\theta)^{-1} \perp (\beta \perp \lambda \perp \theta)]^{-2} \\
 &= [\beta \perp (\omega \perp \theta)]^{-2} \\
 &= (\beta \perp \varepsilon)^{-2} \\
 &= (\omega)^{-2} \\
 &= (\omega^{-1})^2 \\
 &= (\omega)^2 \\
 &= \alpha
 \end{aligned}$$

3) Tenemos:

- **Elementos absorbentes:** no hay.
- **Elementos idempotentes:** solamente α .
- **Elementos involutivos:** α y ω .

4) Dado que el orden del grupo es 6 el teorema de Lagrange nos dice que los únicos posibles subgrupos son de orden 1, 2, 3 o 6. Además note que cada uno de los subgrupos debe contener al elemento neutro (α) y a los inversos de cada elemento, además de ser cerrado; por eso los subgrupos son:

- **Orden 1:** $\{\alpha\}$
- **Orden 2:** $\{\alpha, \omega\}$
- **Orden 3:** $\{\alpha, \beta, \theta\}$
- **Orden 6:** $\{\alpha, \beta, \varepsilon, \theta, \lambda, \omega\}$

7.2.38  

1) Dado que $(A, *)$ es grupo, sólo faltaría ser conmutativo para ser grupo abeliano, pero $(A, *)$ no lo es dado que $5 * 6 = 3$ y $6 * 5 = 2$, donde claramente $5 * 6 \neq 6 * 5$.

2) Dado que $(A, *)$ es grupo, tiene elemento neutro y este corresponde a 1. Así tenemos que los inversos de cada elemento son: $1^{-1} = 1$, $2^{-1} = 3$, $3^{-1} = 2$ y $3^{-1} = 2$, $4^{-1} = 4$, $5^{-1} = 5$, y $6^{-1} = 6$.

3) Dado que el orden del grupo es 6 el teorema de Lagrange nos dice que los únicos posibles subgrupos son de orden 1, 2, 3 o 6. Además note que cada uno de los subgrupos debe contener al elemento neutro (1) y a los inversos de cada elemento, además de ser cerrado; por eso los subgrupos son:

- **Orden 1:** $\{1\}$
- **Orden 2:** $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{1, 6\}$
- **Orden 3:** $\{1, 2, 3\}$
- **Orden 6:** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

7.2.39   Se omite.

7.2.40   Se omite.

7.2.41   Se omite.

7.2.42   Se omite.

7.2.43   Se omite.

7.2.44   Se omite.

7.2.45   Se omite.

7.2.46   Se omite.

7.2.47   Se omite.

7.3. Subgrupos

7.3.1   Se omite.

7.3.2  


a.) Neutro es d

b.) $a^{-1} = b$, $b^{-1} = a$, $c^{-1} = c$, $d^{-1} = d$,




- c.) Los subgrupos triviales son $\{d\}$ y \mathbf{A} . Ahora hay que investigar los subconjuntos de dos elementos (pues su orden debe dividir al orden de \mathbf{A}). El único que tiene una subtabla cerrada es $\{d, c\}$ (el ejercicio pide hacer las subtablas de los subconjuntos de orden 2)

7.3.3 

- a.) Orden 1: $\{1\}$
 b.) Orden 2: $\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 6\}$
 c.) Orden 3: $\{1, 2, 3\}$
 d.) Orden 6: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

7.3.4  Se omite7.3.5  Sean $x, y \in \mathbf{H}$ con $x = \frac{5^{k_1}}{7^{m_1}}$ y $y^{-1} = \frac{7^{m_2}}{5^{k_2}}$. Entonces

$$x \cdot y^{-1} = \frac{5^{k_1}}{7^{m_1}} \cdot \frac{7^{m_2}}{5^{k_2}} = \frac{5^{k_1-k_2}}{7^{m_1-m_2}} = \frac{5^k}{7^m} \in \mathbf{H} \text{ con } k = k_1 - k_2, m = m_1 - m_2 \in \mathbb{Z}$$

7.3.6  Se omite7.3.7  Se omite.7.3.8  Observe que $e \in \mathbf{H}_1$ y $e \in \mathbf{H}_2$, entonces $e \in \mathbf{H}_1 \cap \mathbf{H}_2$. El o la estudiante debe terminar la prueba.7.3.9  Se omite.7.3.10  Se omite7.3.11  Se omite7.3.12  Se omite7.3.13  Se omite7.3.14  La idea es observar que si $h \in \mathbf{H}_1$ y $k \in \mathbf{H}_2$ pero $k \notin \mathbf{H}_1$ y $h \notin \mathbf{H}_2$, entonces $hk \notin \mathbf{H}_1 \cup \mathbf{H}_2$ ¿por qué?7.3.15  Se omite.7.3.16  Se omite.7.3.17  Se omite.7.3.18  $3^m \cdot \frac{1}{3^k} = 3^{m-k} \in \mathbf{H}$