

ESCUELA DE MATEMÁTICA
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Cálculo
**Diferencial
e Integral**

Teoría, ejemplos, ejercicios y solución

**Walter Mora F.
David Masís F.**

2026

COMPARTIR



<https://wimate.org/cdi/>

WALTER MORA-FLORES

Profesor Pensionado · Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
wmora2@gmail.com

DAVID MASÍS-FLORES

Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Campus Tecnológico Central Cartago
dmasis@tec.ac.cr



Este material se distribuye bajo licencia Creative Commons “Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional” (CC BY-NC-ND 4.0) (ver: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>)

Citar como:

Walter Mora F., David Masís-Flores (2026). “Cálculo Diferencial e Integral”.
Revista digital, Matemática, Educación e Internet.
<https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/>
<https://wimate.org/cdi/>.

Copyright©Revista digital Matemática Educación e Internet (<https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/>).
Correo Electrónico: gramirez@itcr.ac.cr
Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Apdo. 159-7050, Cartago
Teléfono (506)25502225

Mora-Flores, Walter; Masís-Flores, David.
Cálculo Diferencial e Integral
Walter Mora F., David Masís-Flores.
– Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica. 2026.
ISBN
1. Cálculo diferencial e integral. 2. Lógica proposicional. 3. Límites y continuidad.
4. Derivadas. 5. Aplicaciones de la derivada. 6. Integral indefinida.
7. Integral definida. 8. Cálculo de áreas.

Prólogo

Este libro fue tomando forma a lo largo de varios semestres de impartir el curso de Cálculo Diferencial e Integral, al ir reuniendo los ejemplos, ejercicios y explicaciones que mejor funcionaban en clase. En sus capítulos se recorren la lógica proposicional, los límites y la continuidad, la derivada y sus aplicaciones, la integral indefinida y sus métodos, y la integral definida, con el cálculo de áreas y las integrales impropias.

No es una colección de resultados sueltos. Lo que da unidad a estos temas es algo más profundo: la idea de límite como hilo conductor, que está por igual detrás de la recta tangente y del área bajo una curva; y el teorema fundamental del cálculo, que revela que derivar e integrar son dos caras de un mismo proceso.

Es un texto que acompaña el trabajo diario del curso: claro, ordenado y, sobre todo, útil. Por eso la teoría va de la mano de ejemplos resueltos y de una buena cantidad de ejercicios —todos con respuesta— para que el lector pueda ponerse a prueba y avanzar a su propio ritmo, con la tranquilidad de saber si va por buen camino.

Ojalá estas páginas sirvan tanto en el aula como en el estudio por cuenta propia, y que al final el lector se lleve algo más valioso que una lista de teoremas: una manera de razonar más rigurosa, más crítica y más suya.

Cartago, Costa Rica

Agosto 2026

WALTER MORA-FLORES

DAVID MASÍS-FLORES

Contenido

1	Lógica proposicional	1
1.	Introducción y proposiciones	1
2.	Ejercicios: Proposiciones y valores de verdad	1
3.	Tablas de verdad y equivalencias lógicas	3
4.	Ejercicios: Tablas de verdad, tautologías y equivalencias	5
5.	Cuantificadores	7
6.	Ejercicios: Cuantificadores	7
7.	Inferencias lógicas	8
8.	Ejercicios: Inferencias Lógicas	9
2	Límites	12
1.	Límite de una función en un punto	12
2.	Ejercicios: Conceptos básicos	13
3.	Ejercicios: Conceptos teóricos	14
4.	Cálculo de límites: formas indeterminadas	16
5.	Ejercicios: Límites inmediatos y formas indeterminadas	17
6.	Límites infinitos, exponenciales y asíntotas	19
7.	Límites trigonométricos	23
8.	Ejercicios: Límites Trigonométricos	24
9.	Límites al infinito	25
10.	Ejercicios: cocientes de polinomios y términos dominantes	26
11.	Radicales y valores absolutos	27
12.	Ejercicios: radicales y valores absolutos	27
13.	Exponenciales y logaritmos al infinito	28
14.	Ejercicios: exponenciales y logaritmos al infinito	28
3	Funciones Continuas	30
1.	Continuidad	30
2.	Ejercicios: continuidad en un punto	30
3.	Criterio lateral y empalme	31
4.	Ejercicios: empalmes y parámetros	32
5.	Álgebra y composición de funciones continuas	34
6.	Ejercicios: álgebra y composición	35
7.	Tipos de discontinuidad	36
8.	Ejercicios: tipos de discontinuidad	36
4	Derivada de una función	37
1.	Derivadas: Interpretación Geométrica	37
2.	Ejercicios: Derivadas por definición	38
3.	Cálculo de derivadas	38
4.	Ejercicios: Cálculo de derivadas	39
5.	Regla de la cadena	40
6.	Ejercicios: Regla de la cadena	41
7.	Valor Numérico	42
8.	Ejercicios: Valor Numérico	42
9.	Conceptos teóricos	43
10.	Ejercicios: Conceptos teóricos	43
11.	Derivación implícita	44
12.	Ejercicios: Derivación implícita	44
13.	Derivación logarítmica	45
14.	Ejercicios: Derivación logarítmica	45
15.	Derivadas de orden superior	46
16.	Ejercicios: Derivadas de orden superior	47
17.	Otros ejercicios	47
18.	Ejercicios: Otros ejercicios	47
5	Aplicaciones de la derivada	49
1.	Movimiento rectilíneo	49
2.	Ejercicios: Movimiento rectilíneo	49
3.	Rectas tangentes y rectas normales	50

4.	Ejercicios: Recta tangente, recta normal	51
5.	L'Hôpital y formas indeterminadas	52
6.	Ejercicios: L'Hôpital y formas indeterminadas	53
7.	Conceptos teóricos	54
8.	Ejercicios: Conceptos teóricos	54
9.	Tasas de cambio relacionadas	55
10.	Ejercicios: Tasas de cambio relacionadas	55
11.	Extremos, crecimiento, decrecimiento y concavidad.	58
12.	Ejercicios: Extremos locales y concavidad	62
13.	Trazo de curvas	63
14.	Ejercicios: Trazo de curvas	63
15.	Problemas de Optimización	67
16.	Ejercicios: Problemas de Optimización	68
6	Integración	73
1.	La integral indefinida	73
2.	Integrales básicas y sustitución	74
3.	Ejercicios: Integrales básicas y sustitución	76
4.	Integración de potencias trigonométricas	77
5.	Ejercicios: Integración de potencias trigonométricas	77
6.	Sustitución trigonométrica	78
7.	Ejercicios: Sustitución trigonométrica	78
8.	Integración por partes	79
9.	Ejercicios: Integración por partes	80
10.	Fracciones parciales	81
11.	Ejercicios: Fracciones parciales.	81
12.	Práctica General.	82
13.	Ejercicios: Práctica General	82
7	Integral definida	84
1.	Integración definida	84
2.	Ejercicios: Integración definida	86
3.	Sumas de Riemann.	87
4.	Ejercicios: Sumas de Riemann.	90
5.	Teorema fundamental del cálculo.	91
6.	Ejercicios: Teorema fundamental del cálculo.	93
7.	Cálculo de áreas.	94
8.	Ejercicios: Cálculo de áreas.	95
9.	Integrales impropias.	99
10.	Ejercicios: Integrales impropias.	100
	Bibliografía	102
8	Solución de los ejercicios	103

Lógica proposicional

1. Introducción y proposiciones

La parte más simple de la lógica matemática es la *lógica proposicional*. Las leyes de la lógica son usadas para distinguir entre argumentos válidos o no válidos. La maquinaria de la lógica proposicional permite formalizar y teorizar sobre la validez de una gran cantidad de argumentos. Sin embargo, también existen argumentos que son intuitivamente válidos, pero cuya validez no se puede probar por la lógica proposicional. El propósito de este tema, en este curso, es el de enseñar al estudiante cómo entender y cómo construir un argumento matemático de manera correcta.

Definición 1 – 1 Proposición y conectivas

Una *proposición* es un enunciado que es verdadero o falso, pero no ambas cosas. A partir de proposiciones simples $P, Q, \dots$ se construyen proposiciones compuestas con las *conectivas*

$$\neg P, \quad P \wedge Q, \quad P \vee Q, \quad P \rightarrow Q, \quad P \equiv Q,$$

que se leen “no P ”, “ P y Q ”, “ P o Q ” (inclusivo), “si P entonces Q ” y “ P si y solo si Q ”.

Asociadas al condicional $P \rightarrow Q$ están la *recíproca* $Q \rightarrow P$, la *contrapositiva* $\neg Q \rightarrow \neg P$ y la *negación* $P \wedge \neg Q$. Un enunciado que no es verdadero ni falso (una pregunta, una orden, o una expresión con una variable libre) no es una proposición.

Ejemplo

1 Simbolizar, negar y hallar la contrapositiva

Sean P : “está lloviendo” y Q : “hay nubes en el cielo”. Trabajemos con el enunciado “si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo”.

1. Es una proposición, pues tiene un valor de verdad; se simboliza $P \rightarrow Q$.
2. Su contrapositiva es $\neg Q \rightarrow \neg P$: “si no hay nubes en el cielo, entonces no está lloviendo”. Es lógicamente equivalente al enunciado original.
3. Su recíproca es $Q \rightarrow P$: “si hay nubes en el cielo, entonces está lloviendo”. No es equivalente al enunciado original.
4. Su negación **no** es $P \rightarrow \neg Q$, sino $P \wedge \neg Q$: “está lloviendo y no hay nubes en el cielo”. Es el único caso en que un condicional es falso.

2.

Ejercicios: Proposiciones y valores de verdad



2.1 Determine si la expresión es una proposición:

1. Expresión: Marte es más grande que Venus.
2. Expresión: Todos los cuadrados son rectángulos.
3. Expresión: $\sqrt[3]{64} = 8$
4. Expresión: Algunos números racionales son enteros.
5. Expresión: Si estas paredes hablaran...

 **2.2** Simbolice las siguientes proposiciones utilizando la representación dada a continuación:

P = “está lloviendo”, Q = “el sol está brillando”, R = “hay nubes en el cielo”

1. Está lloviendo y el Sol está brillando.
2. Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo.
3. No es cierto que el Sol no está brillando.
4. Si no está lloviendo, entonces el Sol no está brillando y hay nubes en el cielo.
5. Si no está lloviendo y no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando.
6. El Sol está brillando si, y sólo si, no está lloviendo.
7. No es el caso que esté lloviendo o el Sol esté brillando, pero hay nubes en el cielo.

 **2.3** Simbolice, a partir de las proposiciones simples anteriores, las proposiciones compuestas que se enuncian a continuación.

1. $(P \wedge Q) \rightarrow R$
2. $\neg P \equiv (Q \vee R)$
3. $\neg R \rightarrow Q$
4. $(P \rightarrow R) \rightarrow Q$

 **2.4** Determine la negación de las proposiciones siguientes y su simbolización:

1. “Está lloviendo y hay nubes en el cielo”. Además, generalice, de manera simbólica, una regla para $\neg (P \wedge R)$
2. “El Sol está brillando o hay nubes en el cielo”. Además, generalice, de manera simbólica, una regla para $\neg (Q \vee R)$.
3. “No está lloviendo”. Además, generalice, de manera simbólica, una regla para $\neg (\neg P)$.

 **2.5** Simbolice la proposición y su negación, enuncie (en palabras) la negación

1. Ayer llovió e hizo frío.
2. Sandra viene mañana o el viernes.
3. El sujeto no estaba armado, pero llevaba gorra o capucha.
4. n es entero o bien racional y positivo.

 **2.6** Enuncie (en palabras) la negación

1. Algunas aves no pueden volar
2. Un día en 1998 cayó nieve en el Irazú.
3. Ningún humano puede vencer a Superman.
4. Para cada $y \in \mathbb{R}$ existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^2 = y$.

R 2.7 Simbolice la proposición y enuncie el contrapositivo

1. Si lo detienen le van a poner multa.
2. Si llego tarde y no traigo excusa, no podré hacer quiz.
3. Cada vez que trasnocho estudiando, me va bien en el siguiente quiz.

R 2.8 Proporcione la negación, la recíproca y la contrapositiva de cada una de las proposiciones siguientes:

1. Si soy listo, entonces soy millonario.
2. Si $2 + 2 = 4$, entonces $2 + 4 = 8$.
3. Si Juan llega demasiado pronto o María demasiado tarde, entonces el jefe se molesta.
4. Si hay nubes en el cielo y el Sol no está brillando, entonces no iré al estadio.
5. Si a es un número real y $a > 0$, entonces $a^2 > 0$.

R 2.9 ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas y cuáles son falsas?

1. Si $3 + 3 = 6$, entonces $4 = 4$.
2. Si $5 \cdot 7 = 35$, entonces $10 - 3 = 13$.
3. $(3 + 5 = 8) \vee (5 - 3 = 4)$.
4. $(5 - 3 = 8) \rightarrow (1 - 7 = 6)$.
5. $(4 + 6 = 9) \equiv (5 - 2 = 4)$
6. La capital de Costa Rica es San José y 17 no es un número primo.

3. Tablas de verdad y equivalencias lógicas

Tablas de verdad

P	$\neg P$	P	Q	$P \wedge Q$	P	Q	$P \vee Q$	P	Q	$P \rightarrow Q$	P	Q	$P \equiv Q$
V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	V	F	F	V	F	F
—	—	F	V	F	F	V	V	F	V	V	F	V	F
—	—	F	F	F	F	F	F	F	F	V	F	F	V

Tabla 1.1: Tablas de verdad básicas

Definición 3–2 Tautología, contradicción y contingencia

Una proposición compuesta es una *tautología* si es verdadera para todos los valores de verdad de sus proposiciones simples; es una *contradicción* si es falsa en todos los casos, y una *contingencia* si no es ninguna de las dos.

Se dice que Φ *implica tautológicamente* a Ψ , y se escribe $\Phi \implies \Psi$, si $\Phi \rightarrow \Psi$ es una tautología; y que Φ y Ψ son *lógicamente equivalentes*, $\Phi \equiv \Psi$, si $\Phi \leftrightarrow \Psi$ es una tautología, es decir, si tienen la misma columna final en la tabla de verdad. Una tabla para n proposiciones simples tiene 2^n filas.

Ejemplo**2****Verificar una implicación tautológica con la tabla**

Verifique, usando tablas de verdad, que $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$ implica tautológicamente a la proposición $\neg P$.

Solución.

Por simplicidad en la tabla usamos $\Phi \equiv [(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q]$, $\Psi \equiv \neg P$ y $\Delta \equiv [\Phi \implies \Psi]$; y mostremos que Δ es verdadero siempre, es decir, que tenemos una tautología.

P	Q	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	Φ	Ψ	Δ
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Dado que en todos los casos Δ es verdadero, entonces la expresión corresponde a una implicación tautológica.

Equivalencias lógicas y simplificación**Teorema 3–1 Equivalencias lógicas**

Para proposiciones cualesquiera P , Q y R se cumplen las equivalencias de la tabla siguiente, donde $\mathbf{V_0}$ denota una tautología y $\mathbf{F_0}$ una contradicción. Cada una se comprueba con una tabla de verdad, y todas pueden usarse para *simplificar* una proposición sin construir la tabla completa.

Implicación-disyunción (ID)	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
Contrapositiva	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$
DN	$\neg \neg P \equiv P$
De Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$ $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Conmutatividad	$P \vee Q \equiv Q \vee P$ $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Asociatividad	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$ $P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$
Distributividad	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$
	$P \vee P \equiv P$
Inversos	$P \vee \neg P \equiv \mathbf{V_0}$
	$P \wedge \neg P \equiv \mathbf{F_0}$
Neutro	$P \vee \mathbf{F_0} \equiv P$
	$P \wedge \mathbf{V_0} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \mathbf{F_0} \equiv \mathbf{F_0}$
	$P \vee \mathbf{V_0} \equiv \mathbf{V_0}$
Absorción	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
Exportación	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \rightarrow R$

Ejemplo**3****Determinar un valor de verdad por simplificación**

Suponga que $(P \rightarrow Q) \wedge R$ es verdadera. Determine, usando simplificación, el valor de verdad de la proposición

$$(\neg P \vee T) \vee Q$$

Solución. De acuerdo a las tablas de verdad 1.1 tenemos $(P \rightarrow Q) \wedge R$ es verdadero solo si $(P \rightarrow Q)$ y R son verdaderas. Por tanto,

$$(P \rightarrow Q) \wedge R \text{ es verdadera entonces } \begin{cases} P \rightarrow Q & \text{es verdadera} \\ R & \text{es verdadera} \end{cases}$$

$$\text{Simplificamos: } \begin{cases} (\neg P \vee T) \vee Q & \equiv (\neg P \vee Q) \vee T & (\text{commutatividad, asociatividad}) \\ & \equiv (P \rightarrow Q) \vee T & \text{ID} \end{cases}$$

Y, de acuerdo a la tabla de verdad para la conectiva “ $\vee$ ”, como $P \rightarrow Q$ es **V** entonces

$$(\neg P \vee T) \vee Q \equiv \underbrace{(P \rightarrow Q)}_{\mathbf{V}} \vee T$$

es verdadera (sin importar el valor de verdad de T)

4.**Ejercicios: Tablas de verdad, tautologías y equivalencias**

4.1 Mediante tablas de verdad compruebe que $\neg p \vee q$ y $p \rightarrow q$ son lógicamente equivalentes para dos proposiciones cualesquiera p y q .

4.2 Haga una tabla de verdad para las siguientes proposiciones

- $\neg [p \vee (\neg q)]$
- $x \wedge [y \vee (\neg z)]$

4.3 Muestre por medio de una tabla de verdad que la conclusión en el siguiente razonamiento es incorrecto.

“Si yo fuera el presidente de Costa Rica, entonces viviría en Zapote. No soy el presidente de Costa Rica. Por lo tanto, no vivo en Zapote.”

4.4 ¿Es $p \wedge (q \vee r)$ lógicamente equivalente a $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$?

4.5 Dadas las siguientes proposiciones:

- $p : 5 > 10$.
- $q : \text{Si } x^2 + 1 = 0, \text{ entonces } x \text{ es un número real.}$
- $r : \text{El punto medio de un segmento equidista de los extremos del segmento.}$
- $t : \text{Si } x + 3 = 0, \text{ entonces } x = -3.$

Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

1. $[(p \wedge q) \rightarrow r] \wedge \neg t$
2. $[(p \equiv q) \rightarrow \neg r \wedge t] \vee (p \vee r)$

4.6 Si tenemos las proposiciones $p(x) : x^2 - 16 = 0$, $q(x) : x - 12 = 0$ y $r(x) : x^2 > 9$. Hallar el valor de verdad de

1. $[p(2) \wedge \neg q(2)] \equiv r(4)$.
2. $[\neg p(4) \rightarrow r(5)] \vee \neg q(4)$.
3. $[(p(1) \wedge p(3)) \equiv (r(2) \vee p(3))] \rightarrow [\neg(p(2) \vee q(2))]$.

4.7 Construir la tabla de verdad de las siguientes proposiciones.

1. $(p \equiv \neg q) \equiv (q \rightarrow p)$.
2. $(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q)$.
3. $[(p \vee \neg r) \wedge (p \vee r)] \wedge [(q \rightarrow p) \wedge (q \vee p)]$.

4.8 Determine, con base en tablas de verdad, si cada una de las propiedades que se enuncian es una tautología, una contradicción o una contingencia.

1. $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg P \vee Q)$
2. $(P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \neg Q)$
3. $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg Q \rightarrow \neg P)$
4. $((P \rightarrow Q) \wedge \neg Q) \rightarrow P$

4.9 Use una tabla de verdad para determinar si es una tautología

1. $y \vee (z \rightarrow y)$
2. $[a \rightarrow (\neg b)] \vee (a \wedge b)$
3. $[p \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (r \rightarrow q)$

R 4.10 Use una tabla de verdad para determinar si las siguientes proposiciones son equivalentes

1. $\neg(p \vee q)$ y $(\neg p) \wedge (\neg q)$
2. $x \wedge (y \vee z)$ y $(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
3. $\neg[p \wedge (q \rightarrow r)]$ y $(p \rightarrow q) \wedge [p \rightarrow (\neg r)]$

R 4.11 Determine el valor de la proposición:

$$\text{Si } 5 + 4 = 11, \text{ entonces } 6 + 6 = 12$$

R 4.12 Construir la tabla de verdad de la siguiente proposición:

$$\neg[\neg[p \vee (\neg q \rightarrow p)]] \vee (q \wedge \neg p)$$

R 4.13 Determinar si la proposición $[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ es una tautología.

5. Cuantificadores

Definición 5–3 Cuantificadores

Una expresión $p(x)$ que depende de una variable no es una proposición hasta que se fija el valor de x o se *cuantifica*. Con un universo U :

$$\forall x \in U, p(x) \quad (\text{"para todo"}), \quad \exists x \in U, p(x) \quad (\text{"existe al menos un"}).$$

El universal es verdadero si $p(x)$ lo es para todos los elementos de U , y basta un *contraejemplo* para refutarlo; el existencial es verdadero si $p(x)$ lo es para al menos un elemento, y basta exhibir uno para probarlo. Las negaciones intercambian los cuantificadores:

$$\neg[\forall x, p(x)] \equiv \exists x, \neg p(x), \quad \neg[\exists x, p(x)] \equiv \forall x, \neg p(x).$$

Ejemplo

4 Valor de verdad y negación de un enunciado cuantificado

Consideremos, con universo $U = \mathbb{R}$, el enunciado $\forall x, (x^2 > 9 \rightarrow x > 3)$.

1. Al estar cuantificado ya es una proposición: hay que decidir si es verdadera o falsa.
2. Se busca un contraejemplo, es decir, un x que haga verdadera la hipótesis y falsa la conclusión. Con $x = -4$: $(-4)^2 = 16 > 9$ es verdadero y $-4 > 3$ es falso.
3. Basta ese contraejemplo para concluir que el enunciado es **falso**.
4. Su negación es $\exists x, \neg(x^2 > 9 \rightarrow x > 3)$, y como la negación de un condicional es $P \wedge \neg Q$, queda $\exists x, (x^2 > 9 \wedge x \leq 3)$, que es verdadera: $x = -4$ lo atestigua.

6.

Ejercicios: Cuantificadores

R 6.1 Simbolice la proposición existencial o universal

1. Algunas aves no pueden volar
2. Un día en 1998 cayó nieve en el Irazú.
3. En todos los triángulos la suma de los ángulos es 180° .
4. Para cada $y \in \mathbb{R}$ existe un $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^2 = y$.
5. Para cada número real x existe un número real y mayor que x .
6. Existe un número real y mayor que todos los números reales x .

R 6.2 Determine si la implicación es verdadera o falsa, enuncie su recíproco y determine si es verdadero o falso

1. Si $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$ entonces $x^2 > 0$.
2. Para que exista $1/n$ se necesita que $n \neq 0$.
3. Si $t = 3$ o $t = -3$ entonces $t^2 = 9$ (donde t es un número real).
4. Si todos los cuadrados son rectángulos, todos los triángulos son redondos.

R 6.3 Determine el valor lógico de las siguientes proposiciones,

1. $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 = 0$
2. $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) [x + y = 7]$.

R 6.4 De las siguientes proposiciones, hallar el valor de verdad.

1. $(\forall x \in \mathbb{R} : |x| = x) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} : x + 1 \not= x)$.
2. $(\forall x \in \mathbb{R} : x^3 = x) \rightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : 2x = x)$.

R 6.5 Negar las siguientes proposiciones.

1. $\exists x : x + 7 < y$.
2. $\forall x : p(x) \wedge \exists y : q(y)$.
3. $\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 = x$.
4. $(\exists y) p(y) \rightarrow (\forall x) \neg q(x)$.
5. $(\exists x) [\neg p(x)] \vee (\forall x) [q(x)]$.

R 6.6 Considere el siguiente razonamiento:

Para cada x e y , si x es mayor que y , entonces no ocurre que y sea mayor que x . Dos es mayor que uno. Por tanto, no ocurre que uno sea mayor que dos.

Utilice cuantificadores y el método de demostración directa para probar su validez.

Teorema 7–2 Reglas de inferencia

Un razonamiento con premisas $H_1, \dots, H_n$ y conclusión C es *válido* si $(H_1 \wedge \dots \wedge H_n) \implies C$, es decir, si es imposible que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. Las reglas siguientes son razonamientos válidos y permiten encadenar deducciones sin construir tablas de verdad.

Reglas	Premisas	Conclusión
Simplificación	$P \wedge Q$	$\therefore P$
	$P \wedge Q$	$\therefore Q$
Adjunción	P, Q	$\therefore P \wedge Q$
Adición	P	$\therefore P \vee Q$
Modus ponens	$P, P \rightarrow Q$	$\therefore Q$
Modus tollens	$P \rightarrow Q, \neg Q$	$\therefore \neg P$
Silogismo Disy	$P \vee Q, \neg P$	$\therefore Q$
Silogismo Hip	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R$	$\therefore P \rightarrow R$
Dilema Constructivo	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow S$	$\therefore R \vee S$
Dilema Destructivo	$\neg R \vee \neg S, P \rightarrow R, Q \rightarrow S$	$\therefore \neg P \vee \neg Q$
Ley de casos	$P \rightarrow Q, \neg P \rightarrow R$	$\therefore Q \vee R$

Ejemplo**5****Una deducción con varias reglas**

1. Demuestre P a partir de las premisas

(a) $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S)$

(b) $R \rightarrow T$

(c) $\neg T$

8. Ejercicios: Inferencias Lógicas**8.1** Demuestre

1. $x \wedge z$

1. $\frac{2. (\neg x) \vee y}{y \vee (\neg z)}$

1. $p \vee q$

2. $\frac{2. q \rightarrow r}{3. \neg r}$
 p

1. $(a \vee d) \rightarrow (\neg c)$

3. $\frac{2. c \wedge b}{\neg d}$

8.2 Construir una prueba formal de la validez para cada uno de los argumentos siguientes:

1. Demostrar Q si

(a) $M \rightarrow N$

(b) $N \rightarrow O$

(c) $(M \rightarrow O) \rightarrow (N \rightarrow P)$

(d) $(M \rightarrow P) \rightarrow Q$

2. Demostrar $T \vee S$ si

(a) $Q \vee T$

(b) $Q \rightarrow R$

(c) $\neg R$

8.3 Deducir t a partir de las siguientes premisas:

$(p \wedge q) \rightarrow r, \neg(q \rightarrow r), s \vee p, s \rightarrow t.$

8.4 Analice el siguiente razonamiento y establezca su validez.

Si la ballena es un mamífero, entonces toma oxígeno del aire. Si toma su oxígeno del aire, entonces no necesita branquias. La ballena es un mamífero y vive en el océano. Por lo tanto no necesita branquias.

8.5 Estudie la validez del siguiente argumento:

Si sigue lloviendo, entonces el río se crece. Si sigue lloviendo y el río se crece, entonces el puente será arrastrado por las aguas. Si la continuación de la lluvia hace que el puente sea arrastrado por las aguas, entonces no será suficiente un solo camino para toda la ciudad. O bien un solo camino es suficiente para toda la ciudad o bien los ingenieros han cometido un error. Por tanto, los ingenieros han cometido un error.

8.6 Demostrar $T \wedge S$ a partir de las siguientes premisas:

1. $E \rightarrow S$

2. $\neg T \rightarrow \neg J$

3. $E \wedge J$

8.7 Demostrar que $x < 4$ y $y < 6$ si se satisfacen las siguientes premisas:

1. $P: x + 2 < 6 \Rightarrow x < 4$

2. $Q: y < 6 \vee x + y \not< 10$

3. $R: x + y < 10 \wedge x + 2 < 6$

8.8 Demostrar $x^2 = 9$ si se cumple:

1. $x = 3 \rightarrow 2x^2 = 18$

2. $x = 3 \vee x = -3$

3. $x = -3 \rightarrow 2x^2 = 18$

$$4. 2x^2 = 18 \rightarrow x^2 = 9$$

R 8.9 En la siguiente demostración se concluye $\neg p$ a partir de cuatro premisas. Se usaron reglas de inferencia y leyes lógicas. Para cada paso, indica la ley o regla que se aplicó (DM, IM, CP, DC, DN, AB, SD, etc.)

Paso		
a.	$\neg(p \wedge q)$	Premisa
b.	$\neg q \rightarrow r$	Premisa
c.	$s \rightarrow \neg r$	Premisa
d.	$\neg s \rightarrow \neg(p \vee \neg q)$	Premisa
e.	$\neg p \vee \neg q$	
f.	$\neg s \vee \neg r$	
g.	$\neg r \rightarrow q$	
h.	$\neg(p \vee \neg q) \vee q$	
i.	$(\neg p \wedge q) \vee q$	
j.	q	
$\therefore \neg p$		

R 8.10 Demostrar $D \rightarrow C$ a partir de las premisas:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
2. $D \rightarrow A$
3. B
4. D

R 8.11 En cada caso, demuestre cada proposición a partir de las premisas dadas. Justifique cada paso.

1. (1) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$
 (2) $r \rightarrow t$
 (3) $\neg t$

 $\therefore p$

2. (1) $(R \vee Q) \rightarrow \neg T$
 (2) $\neg Q \vee R$
 (3) $P \vee Q$
 (4) $P \rightarrow (R \wedge S)$

 $\therefore \neg(T \wedge \neg U)$

Límites

1. Límite de una función en un punto

Idea intuitiva

El límite de f en $x = a$ es L y se denota

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

si existe un entorno alrededor de $x = a$ (donde f está definida, excepto tal vez en $x = a$) tal que podemos hacer que los valores $f(x)$ se acerquen a L tanto como queramos, tomando x suficientemente cercano a a (pero distinto de a).

Definición 1 – 1 Límite y límites laterales

Sea $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ y sea a un punto al cual se puede aproximar con puntos de D_f distintos de a . Se escribe

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para $x \in D_f$,

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Los límites laterales $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ se definen de la misma manera, restringiendo $x < a$ y $x > a$, respectivamente. Si a es un extremo del dominio, se considera el límite lateral disponible.

Teorema 1 – 1 Propiedades fundamentales

Sea a un punto interior del dominio de aproximación de f .

1. El límite de f en a , si existe, es único.
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si, y solo si,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x).$$

Por tanto, si los límites laterales son distintos, el límite bilateral no existe.

3. El valor $f(a)$ no interviene en $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Más generalmente, si $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq a$ suficientemente cercano a a , entonces f y g tienen el mismo límite en a , cuando este existe.

Teorema 1–2 Leyes algebraicas de los límites

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M, \quad \lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = cL,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = LM, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0).$$

Además, para $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$; las raíces preservan el límite siempre que las expresiones estén definidas. En particular, los polinomios se evalúan por sustitución directa, y lo mismo ocurre con los cocientes de polinomios cuando el denominador no se anula en el punto.

Definición 1–2 Continuidad

Una función f es continua en a si $f(a)$ está definida y

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

En un punto de unión de una función definida a trozos, la continuidad exige que los dos límites laterales existan, sean iguales y coincidan con $f(a)$.

Definición 1–3 Límites infinitos

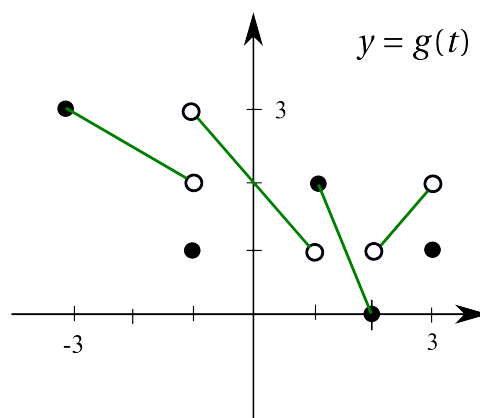
Se escribe $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ si, para todo $M > 0$, los valores de $f(x)$ son mayores que M cuando x está suficientemente cerca de a , con $x \neq a$. De manera análoga se define $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$. Estas expresiones describen un comportamiento no acotado; no representan límites reales finitos.

En el widget  se puede mover el punto con el deslizador y observar cómo los valores de la función actual f , se acercan a un número L cuando x se aproxima a 2. Lo mismo pasa en el ejemplo 3. En el ejemplo 2 se ilustra una situación en la que el límite no existe.

2. Ejercicios: Conceptos básicos

2.1 Determine, a partir del gráfico dado, los siguientes límites.

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\lim_{t \rightarrow 3^+} g(t)$ | 5. $\lim_{t \rightarrow 1^+} g(t)$ |
| 2. $\lim_{t \rightarrow -1^-} g(t)$ | 6. $\lim_{t \rightarrow 2^-} g(t)$ |
| 3. $\lim_{t \rightarrow -1^+} g(t)$ | 7. $\lim_{t \rightarrow 2^+} g(t)$ |
| 4. $\lim_{t \rightarrow 1^-} g(t)$ | 8. $\lim_{t \rightarrow 3^-} g(t)$ |

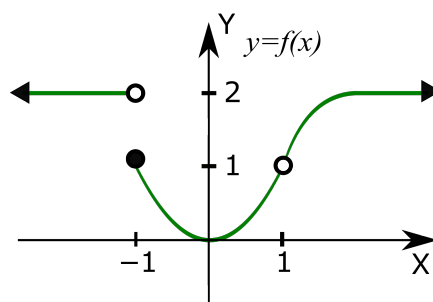


1. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

4. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$



1. $\lim_{x \rightarrow -8} f(x)$

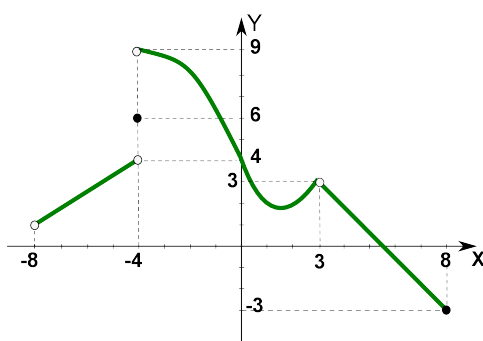
2. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

4. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

5. $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$

6. $\lim_{x \rightarrow -8} f(x)$



1. $\lim_{x \rightarrow -2} h(x)$

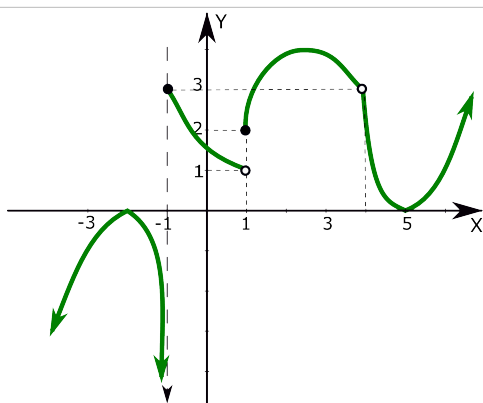
2. $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} h(x)$

4. $\lim_{x \rightarrow 4} h(x)$

5. $\lim_{x \rightarrow 5} h(x)$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$



1. $\lim_{x \rightarrow -4} m(x)$

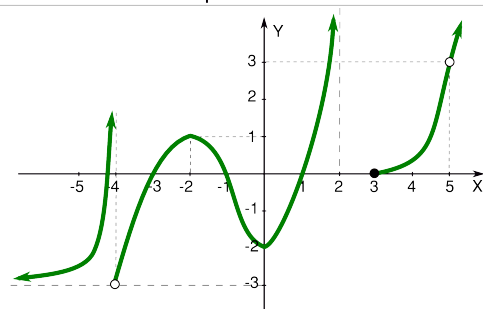
2. $\lim_{x \rightarrow -2} m(x)$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} m(x)$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} m(x)$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} m(x)$

6. $\lim_{x \rightarrow 5} m(x)$



3. Ejercicios: Conceptos teóricos

 **3.1** Las siguientes preguntas evalúan conceptos teóricos.

1. ¿Bajo qué condiciones se satisface que $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{x - 2}{x + 3}$?
2. ¿Por qué es correcto afirmar que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 2}{x + 3}$?
3. Sea f una función tal que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 7$, ¿es posible que $f(3) = 5$? Justifique su respuesta.
4. Considere la función $g : \mathbb{R} - \{-2, -3\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{4 - x^2}{(x + 2)(x + 3)} & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

determine para cuáles reales, el límite existe.

5. Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ puede existir aunque $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ no existan.
6. Considere las funciones $f(x) = \frac{(x - 1)}{|x - 1|}$ y $g(x) = \frac{|x - 1|}{(x - 1)}$
 - (a) Verifique (analizando límites reales) que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ no existen.
 - (b) Verifique que $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)] = 1$

Nota: Este ejercicio muestra que $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot g(x)]$ puede existir aunque $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ no existan.

7. Determine el o los valores de a de modo que $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$ exista.
8. Encuentre los números reales a y b tales que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax + b} - 2}{x} = 1$
9. Sean f y g funciones tales que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = 2$ y $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = 1$. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]$ y $\lim_{x \rightarrow a} [g(x)]$ existen. Determine el valor de $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$.

 **3.2** Considere $g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x \leq -1 \\ 3x + 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 4x^2 + 2x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calcule

1. $g(-1)$
2. $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$
4. $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$
5. $g(1)$
6. $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x)$

7. $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x)$

10. $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$

8. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

11. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

9. $g(0)$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

4. Cálculo de límites: formas indeterminadas

Definición 4–4 Formas indeterminadas

Al sustituir en un límite pueden aparecer expresiones como

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Estas expresiones se llaman *formas indeterminadas*: no representan un valor ni determinan por sí solas el resultado del límite. Antes de aplicar las leyes de los límites se debe transformar la expresión.

Teorema 4–3 Sustitución y simplificación local

Si una expresión se obtiene mediante sumas, productos, cocientes, potencias, raíces, exponenciales o logaritmos de funciones continuas, su límite se calcula por sustitución directa siempre que todas las operaciones resultantes estén definidas. Si la sustitución produce una forma indeterminada, puede simplificarse la expresión para $x \neq a$

Si $f(x) = g(x)$ en un entorno I excepto para $x = a$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

si alguno de estos límites existe.

Ejemplo

6 La forma “0/0” no determina el resultado

Los tres cocientes siguientes producen la misma forma “0/0” al sustituir $x = 0$, y sin embargo tienen tres comportamientos distintos.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$, pues el cociente vale 1 para todo $x \neq 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

4. Se obtuvieron 1, 0 y $+\infty$ a partir de la misma forma “0/0”: el símbolo por sí solo no decide nada, hay que transformar la expresión en cada caso.

Ejemplo

7 Factorizar, cancelar y sustituir

Calculemos $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 - 3x^2 + 5x - 15}$ (es el ítem (1) de la lista siguiente).

1. Al sustituir $x = 3$ se obtiene $\frac{18-15-3}{27-27+15-15} = \frac{0}{0}$: no se puede aplicar la ley del cociente.
2. Se factoriza el numerador: $2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$.
3. Se factoriza el denominador agrupando: $x^3 - 3x^2 + 5x - 15 = x^2(x - 3) + 5(x - 3) = (x - 3)(x^2 + 5)$.
4. Para $x \neq 3$ se cancela el factor $x - 3$, y el teorema permite sustituir la expresión por la simplificada: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x + 1}{x^2 + 5} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$, donde el último paso ya es sustitución directa porque el denominador no se anula.

Lema 4-1 Identidades algebraicas útiles Para eliminar factores que producen “0/0” se pueden usar

$$u^n - v^n = (u - v)(u^{n-1} + u^{n-2}v + \dots + v^{n-1})$$

y

$$u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2).$$

Para expresiones con raíces cuadradas se usa la conjugada:

$$(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B.$$

Además, $\sqrt{x^2} = |x|$; por ello, antes de eliminar un valor absoluto debe determinarse el signo de su argumento en el lado desde el cual se toma el límite.

Ejemplo

8 Racionalizar con la conjugada

Calculemos $\lim_{t \rightarrow 5/2} \frac{4 - \sqrt{2t + 11}}{2t - 5}$ (es el ítem (6) de la lista siguiente).

1. Al sustituir $t = \frac{5}{2}$ se obtiene $\frac{4 - \sqrt{16}}{0} = \frac{0}{0}$.
2. Se multiplica arriba y abajo por la conjugada $4 + \sqrt{2t + 11}$; por el lema, el numerador se convierte en $4^2 - (2t + 11) = 5 - 2t$:

$$\frac{4 - \sqrt{2t + 11}}{2t - 5} = \frac{5 - 2t}{(2t - 5)(4 + \sqrt{2t + 11})}.$$

3. Como $5 - 2t = -(2t - 5)$, para $t \neq \frac{5}{2}$ se cancela el factor $2t - 5$ y queda $\frac{-1}{4 + \sqrt{2t + 11}}$.
4. Ahora la sustitución directa está permitida: $\frac{-1}{4 + \sqrt{16}} = -\frac{1}{8}$.

5.

Ejercicios: Límites inmediatos y formas indeterminadas



5.1 Simplifique la expresión y calcule su límite

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x^3 + 5x - 3x^2 - 15}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x - x^2}{1 + \sqrt{1 + x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$$

$$4. \lim_{b \rightarrow a^2} \frac{a^3 - b - ab + a^2}{2a^3 - 2ab + b - a^2}$$

$$5. \lim_{w \rightarrow a} \frac{2w^3 - 4aw^2 + 2a^2w}{w^4 + aw^3 - 2a^2w^2}$$

$$6. \lim_{t \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{4 - \sqrt{2t + 11}}{2t - 5}$$

$$7. \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^3 + p^2 - 2}{2 - \sqrt{p + 3}}$$

$$8. \lim_{t \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5 + t}}{1 - \sqrt{5 - t}}$$

$$9. \lim_{w \rightarrow -1} \frac{w + 1}{3w + \sqrt{6w^2 + 3}}$$

$$10. \lim_{a \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1 + 8a} - 3}{\sqrt{4a} - 2}$$

$$11. \lim_{d \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3d^2 - 5d - 2} - \sqrt{1 - 5d}}{\sqrt{d^2 - d} - \sqrt{3 - d^2}}$$

$$12. \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t^2 + t}{\sqrt[3]{2t + 1} + \sqrt[3]{t + 2}}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1}$$

$$14. \lim_{y \rightarrow 4} \frac{\sqrt{y} - |2 - y|}{y - 4}$$

$$15. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{5z + 1} - \sqrt[4]{5z + 1}}{z}$$

$$16. \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt[6]{3a + 64}}{5a}$$

$$17. \lim_{y \rightarrow 32} \frac{\sqrt[5]{y^2} - 3 \cdot \sqrt[5]{y} + 2}{y - 4 \cdot \sqrt[5]{y^3}}$$

$$18. \lim_{p \rightarrow -1} \frac{p + 2}{\ln(p + 2)}$$

$$19. \lim_{z \rightarrow (\frac{2}{3})^+} \frac{|-3z + 2|}{18z^2 - 8}$$

$$20. \lim_{p \rightarrow -2} \frac{1 - \sqrt{p + 3}}{(p + 2)^2}$$

$$21. \lim_{y \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{5 - 2y} - 1}{1 + \sqrt[3]{2y} - 5}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow -2} 2.1^{(|x| - 2)/(x + 2)}$$

$$23. \lim_{y \rightarrow 5} \frac{2 - \sqrt[4]{4y - 4}}{\sqrt{y - 1} - 2}$$

$$24. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + ct} - 1}{t}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 3^-} (2)^{\frac{-x - 3}{\ln(x - 2)}}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{5}{4 + x}}$$

$$27. \lim_{b \rightarrow -1} \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{|b| - 1}{b + 1}}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{-5}{\ln(3 - x)}}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 3} (5)^{\frac{1}{x - 3}}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln\left(\frac{x}{-2 + x}\right)$$

$$31. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t - 1}{t^2 - t^4}$$

$$32. \lim_{h \rightarrow -3} \frac{1}{h^2 - 9}$$

$$33. \lim_{y \rightarrow 5} \frac{1}{y} - \frac{2 - y}{(5 - y)^2}$$

$$34. \lim_{y \rightarrow 4^+} \left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{2^y - 1}{-4 \ln(5 - y)}}$$

$$35. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[4]{(x + 2)^4}}{|(x + 1)^2 - 1|}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2 - x} - 1}{1 + \sqrt[5]{x} - 2}$$

$$37. \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{-\pi}{\pi-x}} + 2007}{\frac{1}{\ln(\pi+1-x)}}$$

 **5.2** Determine el valor de k de modo que $\lim_{x \rightarrow k^-} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2k+1}{4x^2-1}} = 0$

6. Límites infinitos, exponenciales y asíntotas

Teorema 6–4 Signos, exponenciales y logaritmos

Si $f(x) \rightarrow N \neq 0$ y $g(x) \rightarrow 0$, el signo de $f(x)/g(x)$ a cada lado de a determina si el cociente tiende a $+\infty$ o a $-\infty$. Si los comportamientos laterales no coinciden, el límite bilateral no existe.

Sea $b > 0$, $b \neq 1$. Si $u(x) \rightarrow A \in \mathbb{R}$, entonces $b^{u(x)} \rightarrow b^A$. Si $u(x) \rightarrow +\infty$, se tiene

$$b^{u(x)} \rightarrow \begin{cases} +\infty, & b > 1, \\ 0, & 0 < b < 1, \end{cases}$$

y para $u(x) \rightarrow -\infty$ los resultados se invierten. También,

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty.$$

Ejemplo 9 Una exponencial con exponente no acotado

Calculemos $\lim_{x \rightarrow -4^-} \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{5}{4+x}}$ (es el ítem (26) de la lista de la sección anterior).

1. Primero se estudia el exponente. Si $x \rightarrow -4^-$ entonces $x < -4$, de modo que $4+x \rightarrow 0^-$: el denominador es negativo y tiende a cero.
2. Por la primera parte del teorema, $\frac{5}{4+x} \rightarrow -\infty$ (numerador constante positivo, denominador 0^-).
3. La base es $b = \frac{1}{7}$, con $0 < b < 1$; para exponente $\rightarrow -\infty$ los resultados se invierten y $b^u \rightarrow +\infty$.
4. Por lo tanto el límite es $+\infty$. Obsérvese que por la derecha el exponente tiende a $+\infty$ y el límite sería 0: por eso el enunciado pide solo el lateral izquierdo.

Definición 6–5 Asíntotas

La recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de f si al menos uno de los límites laterales en a es $+\infty$ o $-\infty$. La recta $y = L$ es una *asíntota horizontal* si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Ejemplo 10 Asíntotas de $f(h) = \frac{1}{h^2-9}$

1. El denominador se anula en $h = \pm 3$: $h^2 - 9 = (h-3)(h+3)$. Ahí el numerador vale $1 \neq 0$, así que se aplica la primera parte del teorema anterior.

2. En $h = -3$ se analizan los signos: si $h \rightarrow -3^-$, entonces $h + 3 < 0$ y $h - 3 < 0$, el producto es positivo y $f(h) \rightarrow +\infty$; si $h \rightarrow -3^+$, entonces $h + 3 > 0$ y $h - 3 < 0$, el producto es negativo y $f(h) \rightarrow -\infty$.
3. Por la definición, $h = -3$ es una asíntota vertical (y por el mismo argumento también lo es $h = 3$); el límite bilateral en -3 no existe.
4. Como $h^2 - 9 \rightarrow +\infty$ cuando $h \rightarrow \pm\infty$, se tiene $f(h) \rightarrow 0$: la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

6.1 Considere las funciones siguientes y sus representaciones gráficas. En cada caso, y si existen, determine a partir de la gráfica los límites, o los valores de la función, que se indican.

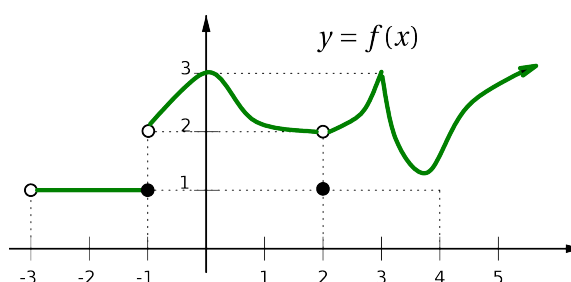
1. (a) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(d) $f(-1)$; $f(2)$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



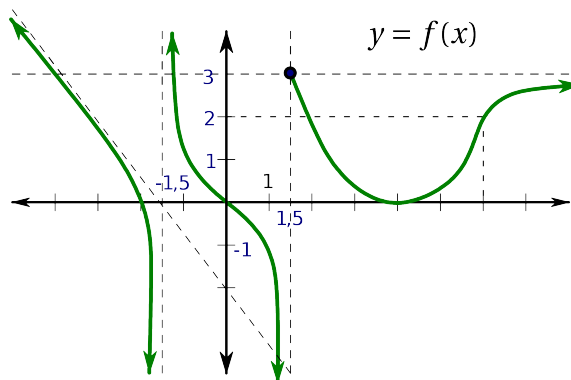
2. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -3/2} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 3/2} f(x)$

(d) $f(3/2)$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



3. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

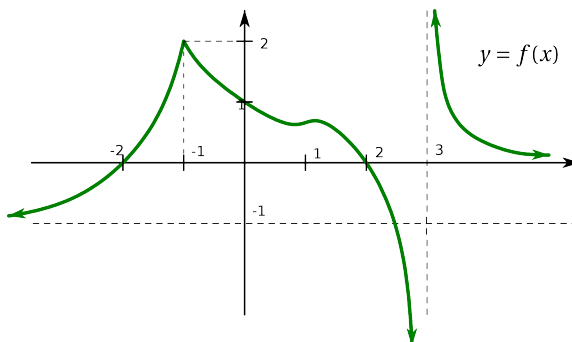
(c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



4. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

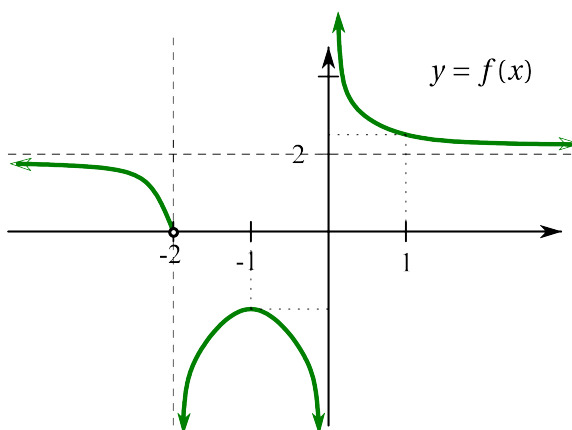
(b) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



5. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$

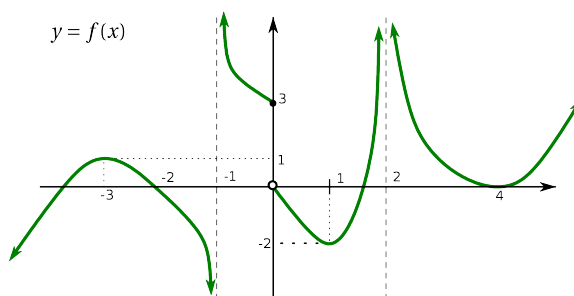
(c) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$



6. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

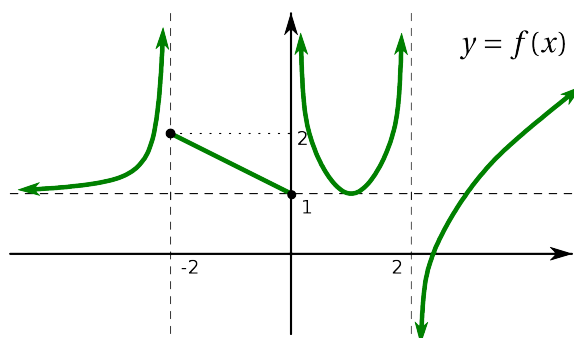
(d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

(g) $f(-2)$

(h) $f(0)$



6.2 Para cada uno de los siguientes casos, realice la representación gráfica de una función f que cumpla simultáneamente las condiciones dadas (solo es un bosquejo de la gráfica, no una fórmula).

1. Propiedades de la función f

a.) $D_f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$

b.) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$

c.) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3$

d.) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$

e.) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3$

f.) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$

g.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$

h.) $f(0) = 0$

2. Propiedades de la función f

a.) $D_f = \mathbb{R} -]0, 1]$

b.) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

d.) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

e.) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2$

f.) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$

g.) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty$

h.) $f(-1) = f(3) = 0$

3. Propiedades de la función f

a.) $D_f = [-3, +\infty[$

b.) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 1$

c.) $f(x) \neq 0, \forall x \in]0, +\infty[$

d.) $f(x) = 2, \forall x \in [-1, 1]$

e.) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

f.) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$

g.) $f(-3) = f(3) = -1$

h.) $\lim_{x \rightarrow -1}$ no existe.

i.) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe

j.) $\forall x_0 \in [0, +\infty[$

4. Propiedades de la función f

a.) $D_f =]-3, +\infty[- \{-2, 3\}$

b.) $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 0$

c.) $\lim_{x \rightarrow -2^-} h(x) = 4$

d.) $\lim_{x \rightarrow -2^+} h(x) = 5$

e.) $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = -\infty$

7. Límites trigonométricos**Teorema 7-5 Límites trigonométricos fundamentales**

Los ángulos se miden en radianes. Se tiene

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\tan u}{u} = 1, \quad \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \cos u}{u^2} = \frac{1}{2}.$$

Estas igualdades siguen siendo válidas al sustituir u por cualquier función $u(x)$ que tienda a 0. Además,

$$\lim_{u \rightarrow a} \frac{\sin u - \sin a}{u - a} = \cos a, \quad \lim_{u \rightarrow a} \frac{\cos u - \cos a}{u - a} = -\sin a.$$

Ejemplo

11 Ajustar el argumento para usar $\frac{\tan u}{u}$

Calculemos $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\tan(3z)}{8z \cos z}$ (es el ítem (10) de la lista siguiente).

1. Al sustituir $z = 0$ se obtiene "0/0"; el límite fundamental $\frac{\tan u}{u} \rightarrow 1$ exige que el ángulo y el denominador sean el mismo, y aquí el ángulo es $3z$ mientras que abajo aparece $8z$.

2. Se multiplica y divide por 3 para reconstruir ese cociente:

$$\frac{\tan(3z)}{8z \cos z} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\tan(3z)}{3z} \cdot \frac{1}{\cos z}.$$

3. Con $u = 3z$ se tiene $u \rightarrow 0$, de modo que $\frac{\tan(3z)}{3z} \rightarrow 1$; además $\cos z \rightarrow 1$ por sustitución directa.

4. Por la ley del producto, $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\tan(3z)}{8z \cos z} = \frac{3}{8} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{8}$.

8. Ejercicios: Límites Trigonométricos

8.1 Calcule

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x \sin x}{\cos x - 1}$$

$$2. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin(2t)}{t + \sin(3t)}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 n}{\sin^2 n}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1}$$

$$5. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y - \sin y}{\sin^3 y}$$

$$6. \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos a}}{\sin^2 a}$$

$$7. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sec(2z) \cdot \tan(3z)}{4z}$$

$$8. \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sec y - 1}{y^3 \csc y}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x + x^2 \cos x}{x \tan x}$$

$$10. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\tan(3z)}{8z \cos z}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln \left(\frac{4}{\sin(3x-3)} \right)$$

$$12. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - \tan z}{z^2 \cdot \sin(2z)}$$

$$13. \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin(2t)}{2 \cos(2t) - 2}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left[\left(\frac{\pi}{4} \right)^{\tan(x)} \cdot \frac{\sin(2x-3\pi)}{2x-\pi} \right]$$

$$15. \lim_{t \rightarrow -4\pi/3} \frac{\sin t}{t}$$

$$16. \lim_{w \rightarrow \pi/4} \frac{\sin w - \cos w}{1 - \tan w}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cot x \cos x}{1 - \sin x}$$

$$18. \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\sin 5\beta}{\beta}$$

$$19. \lim_{z \rightarrow 0} \frac{5 \sin^2(3z)}{2z^2}$$

$$20. \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{u}}{\sin u}$$

$$21. \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^2 - 1}{\sin(\pi y)}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{7} \right)^{\cot|x|}$$

$$23. \lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(\alpha/2)}{\pi - \alpha}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -\pi/6} \frac{\tan(x + \pi/6)}{6x + \pi}$$

$$25. \lim_{\beta \rightarrow 5\pi/6} 3 \sin \beta - 2 \cos \beta$$

$$26. \lim_{\beta \rightarrow \pi/2} \sin(\cos \beta) \sec^2 \beta$$

$$27. \lim_{w \rightarrow 0} \left(\frac{\sec(w) - 1}{w^2 \csc(w)} \right)$$

$$28. \lim_{u \rightarrow a} \frac{\sin u - \sin a}{u - a} \text{ con } a \text{ constante}$$

$$29. \lim_{u \rightarrow a} \frac{\cos u - \cos a}{u - a} \text{ con } a \text{ constante}$$

9. Límites al infinito

Definición 9-6 Límite cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Se escribe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ si los valores de $f(x)$ se acercan tanto como se quiera a L al tomar x suficientemente grande. De manera precisa, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$x > N \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Para $x \rightarrow -\infty$ se sustituye la condición $x > N$ por $x < -N$. La recta $y = L$ es una asíntota horizontal si alguno de estos límites es igual a L .

Ejemplo

12 Una asíntota horizontal

Calculemos $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - 1}{x + 3}$.

1. La sustitución directa no sirve: numerador y denominador crecen sin cota (forma $\frac{\infty}{\infty}$).
2. Se divide numerador y denominador entre x , que es la potencia dominante:

$$\frac{2x - 1}{x + 3} = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{3}{x}}.$$

3. Cuando $|x|$ crece, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ y $\frac{3}{x} \rightarrow 0$; por las leyes de los límites el cociente tiende a $\frac{2 - 0}{1 + 0} = 2$.
4. El resultado es el mismo por ambos lados, así que $y = 2$ es una asíntota horizontal de la gráfica.

Definición 9-7 Comportamiento infinito

Se escribe $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ si, para cada $M > 0$, existe $N > 0$ tal que

$$x > N \implies f(x) > M.$$

Los casos $x \rightarrow -\infty$ y $f(x) \rightarrow -\infty$ se definen cambiando las desigualdades correspondientes. Los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ no son números reales; describen crecimiento no acotado.

Ejemplo**13 Un polinomio que no está acotado**

Veamos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x) = -\infty$.

1. Se factoriza la potencia dominante: $x^3 - 2x = x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)$.
2. El paréntesis tiende a 1, pues $\frac{2}{x^2} \rightarrow 0$; en particular es positivo para $|x|$ grande.
3. Como el exponente 3 es impar, $x^3 \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow -\infty$.
4. El producto de una cantidad que tiende a $-\infty$ por otra que tiende a $1 > 0$ tiende a $-\infty$; y esto es lo que dice la definición: dado cualquier $M > 0$, para x suficientemente negativo se tiene $x^3 - 2x < -M$.

Teorema 9–6 Cocientes de polinomios

Sean $P(x) = a_m x^m + \dots$ y $Q(x) = b_n x^n + \dots$, con $a_m \neq 0$ y $b_n \neq 0$. Entonces el comportamiento de $P(x)/Q(x)$ cuando $x \rightarrow \pm\infty$ está determinado por

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{a_m}{b_n} x^{m-n}.$$

Aquí, $F(x) \sim G(x)$ significa que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} F(x)/G(x) = 1$. En particular,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0, & m < n, \\ \frac{a_m}{b_n}, & m = n. \end{cases}$$

Si $m > n$, el signo y la paridad de la potencia dominante determinan si el cociente tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

Ejemplo**14 Comparación de grados**

Calculemos $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$ (es el primer ítem de la lista siguiente).

1. Se identifican los términos dominantes: x^2 arriba y x^3 abajo, de modo que $m = 2$ y $n = 3$.
2. Por el teorema, el cociente se comporta como $\frac{1}{1} x^{2-3} = \frac{1}{x}$.
3. Como $m < n$, el límite es 0; con detalle, al dividir todo entre x^3 se obtiene $\frac{\frac{1}{x} - \frac{4}{x^3}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}}$, cuyo numerador tiende a 0 y cuyo denominador tiende a 1.
4. Por lo tanto el límite vale 0 (y $y = 0$ es asíntota horizontal). Obsérvese que el mismo argumento sirve para $x \rightarrow +\infty$.

10.1 Calcule cada uno de los límites siguientes

$$1. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x + 3}{-x^3 + 1}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5 + 3x^7}{2x^8}$$

$$4. \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y^3 - 2y + 1}{y - 5} + \frac{y^2 + 6}{y^2 - y}$$

$$5. \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^2}{3b + x} - \frac{b^3}{3b^2 - 4} \right)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1}{2x^{\frac{4}{3}} + 2x - \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^5}}$$

11. Radicales y valores absolutos

Lema 11 – 2 Potencias, raíces y valores absolutos Al extraer potencias de una raíz debe conservarse el signo correcto:

$$\sqrt{x^2} = |x|, \quad |x| = \begin{cases} x, & x \rightarrow +\infty, \\ -x, & x \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

En general, $\sqrt[n]{x^n} = |x|$ si n es par y $\sqrt[n]{x^n} = x$ si n es impar. Las diferencias de radicales pueden transformarse mediante

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}},$$

siempre que las raíces estén definidas y el denominador no sea cero.

Ejemplo

15 El signo al salir de la raíz

Calculemos $\lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{3r + 2}{\sqrt{4r^2 - r + 1}}$ (es el primer ítem de la lista siguiente).

1. Se factoriza r^2 dentro de la raíz: $\sqrt{4r^2 - r + 1} = \sqrt{r^2} \sqrt{4 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}}$.

2. Por el lema, $\sqrt{r^2} = |r|$, y como $r \rightarrow -\infty$ se tiene $r < 0$ y $|r| = -r$. *Este es el paso donde se pierde el resultado si se escribe r en lugar de $-r$.*

3. Se divide numerador y denominador entre r (que es negativo):

$$\frac{3r + 2}{-r\sqrt{4 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}}} = \frac{3 + \frac{2}{r}}{-\sqrt{4 - \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}}}.$$

4. Como $\frac{1}{r} \rightarrow 0$ y $\frac{2}{r} \rightarrow 0$, el límite es $\frac{3}{-\sqrt{4}} = -\frac{3}{2}$.

12. Ejercicios: radicales y valores absolutos

12.1 Calcule cada uno de los límites siguientes

$$1. \lim_{r \rightarrow -\infty} \frac{3r + 2}{\sqrt{4r^2 - r} + 1}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 14} + x}{\sqrt{x^2 - 2} + x}$$

$$3. \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{3z^2 - 5z + 1}{\sqrt[3]{z^6 + 1} - z}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 6} - \sqrt{4x^2 - x} \right)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 2x - 1} + x \right)$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 1} - 3x$$

13. Exponenciales y logaritmos al infinito

Teorema 13–7 Términos dominantes y funciones trascendentes

En una suma de potencias, el término de mayor exponente domina cuando $|x| \rightarrow \infty$. Para $a > 1$ y $0 < b < 1$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty.$$

Si $u(x) \rightarrow 0$, entonces $a^{u(x)} \rightarrow 1$; si $u(x) \rightarrow +\infty$, entonces $a^{u(x)} \rightarrow +\infty$ y $b^{u(x)} \rightarrow 0$. Para simplificar expresiones se pueden usar

$$\ln A - \ln B = \ln \left(\frac{A}{B} \right), \quad \frac{a^x}{c^x} = \left(\frac{a}{c} \right)^x,$$

cuando las cantidades involucradas estén definidas.

Ejemplo

16 Una diferencia de logaritmos

Calculemos $\lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln(t^2 - 4) - \ln(4t^2 + 1)]$ (es el segundo ítem de la lista siguiente).

1. Cada sumando tiende a $+\infty$, así que se tiene la forma indeterminada $\infty - \infty$: no se puede separar el límite en dos.
2. Se usa la identidad del teorema para escribir la diferencia como un solo logaritmo: $\ln(t^2 - 4) - \ln(4t^2 + 1) = \ln \left(\frac{t^2 - 4}{4t^2 + 1} \right)$, válido porque ambos argumentos son positivos para t grande.
3. El argumento es un cociente de polinomios del mismo grado, de modo que tiende a $\frac{1}{4}$.
4. Como el logaritmo es continuo, se puede pasar el límite adentro: $\ln \left(\frac{1}{4} \right) = -\ln 4$.

14.

Ejercicios: exponenciales y logaritmos al infinito

14.1 Calcule cada uno de los límites siguientes

$$1. \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{e^q - e^{-q}}{2}$$

$$2. \lim_{t \rightarrow \infty} \ln(t^2 - 4) - \ln(4t^2 + 1)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2^x + 4^x}{3^x - 5^x} + \frac{|x + 1| - 1}{x} \right]$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e)^{\frac{x^2 + x - 2}{4x^3 - 1}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 1}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{35}{\ln(x - 6)}}$$

Funciones Continuas

1. Continuidad

Definición 1 – 1 Continuidad en un punto y en un conjunto

Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y sea c un punto interior de I . La función f es *continua en c* si

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Por tanto, se requieren tres condiciones: $f(c)$ está definida, el límite de f en c existe y dicho límite es igual a $f(c)$. Se dice que f es continua en un conjunto si es continua en cada punto de ese conjunto. En un extremo del dominio se utiliza el límite lateral disponible.

Ejemplo

17 Verificación de las tres condiciones de la definición

1 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$ es continua en $x = 1$ pues $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = 0 = f(1)$

2 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ -2 & \text{si } x = -1 \end{cases}$ es continua en $x = -1$ pues $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} x - 1 = -2 = f(-1)$

En ambos casos se recorren las tres condiciones de la definición: primero se comprueba que $f(c)$ está definida, luego se calcula $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ simplificando la expresión para $x \neq c$, y finalmente se verifica que ambos números coinciden.

2. Ejercicios: continuidad en un punto

 **2.1** Determine si la función es continua en el valor dado de $c = -1$ si

$$g(x) = \begin{cases} 8x - 5 & \text{si } x < -1 \\ 10x - 2x^2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

 **2.2** A continuación se presentan ciertas afirmaciones, determine si cada una de ellas es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

1. Sea f una función tal que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ existe, entonces necesariamente f debe estar definida en $x = 1$.
2. Sean f y g funciones, si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe, necesariamente $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$
3. El límite $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(a+1)(x-3)}{|3-x|}$ existe únicamente si $a = -1$.
4. Sea g una función continua en $\mathbb{R}$, si $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5$, entonces puede darse que $g(2) \neq 5$

$$5. \text{ Si } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x+4)}{2x+8} & \text{si } x < -4 \\ \frac{\sqrt{x+8}}{4} & \text{si } x > -4 \end{cases}$$

entonces

- i.) El límite $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ existe
- ii.) f es continua en $x = -4$

3. Criterio lateral y empalme

Teorema 3–1 Criterio lateral y empalme

Si c es un punto interior del dominio, f es continua en c si, y solo si,

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x).$$

En consecuencia, si una función está definida a trozos y cada una de sus ramas es continua, solamente deben revisarse los puntos de empalme. En cada uno de ellos, los dos límites laterales y el valor asignado a la función deben coincidir.

Ejemplo

18

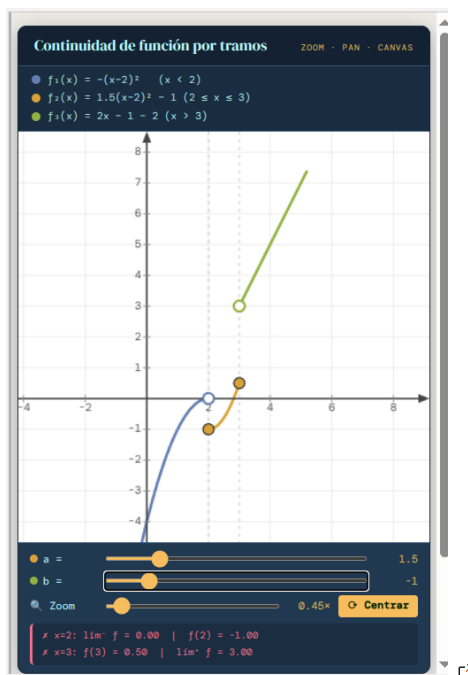
Empalme de una función definida a trozos

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2)^2, & \text{si } x < 2 \\ a(x-2)^2 + b, & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \\ 2x + b - 2, & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Determinar valores de a y b tal que la función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

Solución. En el widget podemos usar los deslizadores para ajustar los valores de a y b , con el propósito de que f sea continua en todo $\mathbb{R}$. Luego debemos justificar con un análisis formal.

Fig. 3.1: Determinar a y b para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$ (hacer clic)

Formalmente $\square$: los pasos son los siguientes.

1. Las tres funciones que conforman f son continuas en todo $\mathbb{R}$ (dos polinomios y una parábola), así que, por el teorema, solo hay que revisar los puntos de **empalme**: $x = 2$ y $x = 3$.
2. Empalme en $x = 2$: se igualan el límite por la izquierda y el valor de la rama central, $\lim_{x \rightarrow 2^-} -(x-2)^2 = 0$ y $a(2-2)^2 + b = b$; por lo tanto $b = 0$.
3. Empalme en $x = 3$: $\lim_{x \rightarrow 3^-} a(x-2)^2 + b = a + b$ y $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x + b - 2 = 4 + b$; de $a + b = 4 + b$ se obtiene $a = 4$.
4. Con $a = 4$ y $b = 0$ las tres ramas empalman y f es continua en todo $\mathbb{R}$.

4. Ejercicios: empalmes y parámetros

4.1 Determine el conjunto de valores de la variable donde la función es continua

$$1. r(t) = \begin{cases} 6 - t & \text{si } t < -2 \\ 10 + t & \text{si } -2 \leq t < 1 \\ 5 + 6t & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

$$2. h(y) = \begin{cases} \frac{y^2 - 1}{y - 1} & \text{si } y < -1 \\ \frac{1}{y^2 - 4} & \text{si } -1 < y < 3 \\ \frac{2y^2 - 9y + 4}{y^2 - 3y - 4} & \text{si } y \geq 3 \end{cases}$$

(R) 4.2 Encuentre los valores de a y b para que la función sea continua en $\mathbb{R}$

$$1. g(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \leq -1 \\ at + b & \text{si } -1 < t \leq 3 \\ -2 & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

$$2. r(u) = \begin{cases} u + 1 & \text{si } u \leq 0 \\ u^2 + a & \text{si } 0 < u \leq b \\ 7 - u & \text{si } u > b \end{cases}$$

(R) 4.3 Para cada una de las siguientes funciones, halle el valor de a y b para que la función correspondiente sea continua en el valor de x que se indica.

$$\begin{aligned} \text{a) En } x = 0, \quad g(x) &= \begin{cases} \frac{\sin(2x)}{ax} & \text{si } x < 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^{ax}}{b} & \text{si } x > 0 \end{cases} & \text{b) En } x = 1, \quad h(x) &= \begin{cases} \frac{x+1}{a} & \text{si } x < 1 \\ b & \text{si } x = 1 \\ \frac{a^2x - 1}{1+a} & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(R) 4.4 Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{si } x \leq k \\ x^2 + 9 & \text{si } x > k \end{cases}$

Determine el o los valores de k , de modo que f sea continua en $\mathbb{R}$.

(R) 4.5 Para cada una de las siguientes funciones, determine si es continua en todos los reales.

$$1. f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 1 \\ 4 & \text{si } x = 1 \\ -x + e + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$4. h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

 **4.6** Determine los valores de a y c (si es posible) de modo que f sea continua:

$$1. f(x) = \begin{cases} x + 2c & \text{si } x < -2 \\ 3ax + a & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ 3x - 2a & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} -3 \sin x & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + c & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ a & \text{si } x = 1 \\ x^2 + a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

5. Álgebra y composición de funciones continuas

Teorema 5-2 Álgebra y composición de funciones continuas

Si f y g son continuas en c y $k \in \mathbb{R}$, entonces también son continuas en c las funciones

$$kf, \quad f + g, \quad f - g, \quad fg, \quad \frac{f}{g} \quad \text{si } g(c) \neq 0.$$

Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, entonces la composición $f \circ g$ es continua en c y

$$\lim_{x \rightarrow c} f(g(x)) = f(g(c)).$$

Ejemplo

19 Continuidad de una composición

Estudiemos $h(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right)$ y calculemos $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

1. Se escribe $h = f \circ g$ con $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ y $f(u) = \sin u$.
2. g es un cociente de polinomios y su denominador nunca se anula ($x^2 + 1 \geq 1$), así que g es continua en todo $\mathbb{R}$; en particular en $c = 0$, donde $g(0) = 1$.
3. $f(u) = \sin u$ es continua en todo $\mathbb{R}$, en particular en $g(0) = 1$.

4. Por el teorema, $h = f \circ g$ es continua en 0 y el límite se calcula evaluando: $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) = \sin(1)$.

Corolario 1 (Funciones elementales).

Los polinomios, las funciones exponenciales, las funciones trigonométricas y la función valor absoluto son continuas en todos los puntos de sus dominios. Las funciones racionales son continuas donde el denominador no se anula; las funciones logarítmicas y las funciones con radicales son continuas donde están definidas.

Ejemplo

20

Conjunto de continuidad de una función elemental

Determinemos dónde es continua $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

1. El numerador $\sqrt{x-1}$ es continuo donde está definido, es decir, en $x \geq 1$.
2. El denominador $x^2 - 4$ es un polinomio, continuo en todo $\mathbb{R}$, y se anula en $x = \pm 2$.
3. Por el teorema del cociente, f es continua en los puntos donde ambas funciones lo son y además el denominador no se anula. El valor $x = -2$ ya estaba excluido por el dominio del radical.
4. Por lo tanto f es continua en $[1, 2[\cup]2, +\infty[$.

6. Ejercicios: álgebra y composición



6.1 Considere las siguientes funciones:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{si } x < 2 \\ 6 & \text{si } x = 2 \text{ y} \\ 2ax + 3b & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} cx^2 + 4 & \text{si } x < 6 \\ cx + b & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

Determine condiciones suficientes para a , b y c para que la función $f \circ g$ sea continua en $x = 2$.



6.2 Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ que cumple:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 6 \quad \text{y} \quad f(x) = 0 \quad \text{si y solo si} \quad x = 2$$

Considere la función:
$$g(x) = \begin{cases} \frac{a \cdot f(x)}{x^2 - 5x + 6} + 4x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } x = 2 \\ \frac{b \cdot \operatorname{sen}(x - 2)}{f(x)} + a & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine el valor de a y b para que g sea continua en $\mathbb{R}$.

7. Tipos de discontinuidad

Definición 7–2 Tipos básicos de discontinuidad

Una discontinuidad en c es *evitable* si $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe y es finito, pero $f(c)$ no está definida o no coincide con el límite. Es una discontinuidad de *salto* si los dos límites laterales existen y son finitos, pero son distintos. Es *infinita* si al menos uno de los límites laterales es $+\infty$ o $-\infty$.

Ejemplo

21 Los tres tipos en tres funciones

1. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ tiene una discontinuidad *evitable* en $x = 1$: para $x \neq 1$ vale $x + 1$, de modo que el límite existe y es 2, pero $f(1)$ no está definida. Basta definir $f(1) = 2$ para volverla continua.
2. $g(x) = \frac{|x|}{x}$ tiene una discontinuidad de *salto* en $x = 0$: los límites laterales existen y son finitos, -1 por la izquierda y 1 por la derecha, pero son distintos. Ningún valor asignado a $g(0)$ la hace continua.
3. $h(x) = \frac{1}{x}$ tiene una discontinuidad *infinita* en $x = 0$, pues $h(x) \rightarrow -\infty$ por la izquierda y $h(x) \rightarrow +\infty$ por la derecha.
4. La clasificación se decide siempre en el mismo orden: primero se calculan los dos límites laterales; si son iguales y finitos, la discontinuidad es evitable; si son finitos y distintos, es de salto; si alguno es infinito, es infinita.

8. Ejercicios: tipos de discontinuidad

 **8.1** Considere la función f definida por:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} & \text{si } x \neq \pm 1 \\ m & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

¿Es f continua en $x = -1$? ¿Cuánto debe valer m para que f sea continua en $x = 1$?

Derivada de una función

1. Derivadas: Interpretación Geométrica

Definición 1 – 1 Derivada

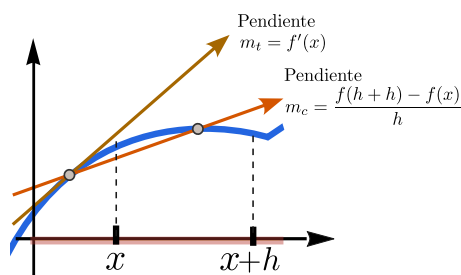
Sea f una función definida en un entorno de a . La *derivada* de f en a es

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

si este límite existe y es finito. Equivalentemente,

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Si $f'(a)$ existe, f es *derivable en a* . La función que asigna $x \mapsto f'(x)$ se llama función derivada.



Ejemplo

22 Derivada por definición

Calculemos $f'(a)$ para $f(x) = \frac{1}{x}$, con $a \neq 0$.

1. Se escribe el cociente de diferencias: $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} \right)$.
2. Se suman las fracciones del paréntesis: $\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = \frac{-h}{a(a+h)}$.
3. Se cancela h (lícito porque en el límite $h \neq 0$): $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{-1}{a(a+h)}$.
4. Se toma el límite: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}$.

Teorema 1 – 1 Interpretación geométrica y continuidad

La cantidad $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$; por tanto, dicha recta tiene ecuación

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Además, si f es derivable en a , entonces f es continua en a . El recíproco no es necesariamente verdadero.

Ejemplo

23 Recta tangente

Halleemos la recta tangente a $f(x) = \frac{1}{x}$ en el punto de abscisa $a = 2$.

1. El punto de tangencia es $(2, f(2)) = \left(2, \frac{1}{2}\right)$.
2. Por el ejemplo anterior, $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$, de donde la pendiente es $f'(2) = -\frac{1}{4}$.
3. Se sustituye en $y - f(a) = f'(a)(x - a)$: $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2)$, es decir, $y = -\frac{x}{4} + 1$.
4. Como f es derivable en 2, también es continua ahí. El recíproco falla: $g(x) = |x|$ es continua en 0 y no es derivable en 0, pues los cocientes de diferencias tienden a -1 por la izquierda y a 1 por la derecha.

En el widget  podemos mover el deslizador que cambia el valor de h para visualizar como al variar las pendientes de las cuerdas, el límite de las pendientes es la pendiente de la tangente.

2. Ejercicios: Derivadas por definición

 2.1 Use la definición para calcular la derivada de f .

1. $f(x) = 1 - 3x + x^2$ en $x = -6$
2. $f(v) = \frac{2v+3}{v-4}$ en $v = 3$
3. $f(v) = \sqrt{v+3}$ en $v = 1$
4. $f(y) = \sqrt{2y^2 - 5}$ en $y = 2$
5. $f(x) = 5 \cos(x - \pi)$ en $x = \pi$
6. $f(r) = \sin r - 3 \cos r$ en $r = \pi/3$
7. $g(x) = cx^2 + bx + 1$
8. $h(x) = \frac{-1}{\sqrt{x+1}}$
9. $g(x) = x + \sqrt{x}$
10. $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$

3. Cálculo de derivadas

Teorema 3-2 Reglas de derivación

Sean f y g derivables, y sean $c, k \in \mathbb{R}$. En los puntos donde las expresiones estén definidas,

$$\begin{aligned} (c)' &= 0, & (x^k)' &= kx^{k-1}, \\ (f \pm g)' &= f' \pm g', & (cf)' &= cf', \\ (fg)' &= f'g + fg', & \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (g \neq 0). \end{aligned}$$

La regla de la potencia se aplica para exponentes reales en los intervalos donde la potencia correspondiente está definida.

Ejemplo

24 Reglas del producto y del cociente

Derivemos $f(x) = \frac{2x^3 - 5x}{x^2 + 1}$.

1. Se identifican el numerador y el denominador: $u = 2x^3 - 5x$ y $v = x^2 + 1$, con $v \neq 0$ para todo x .

2. Con la regla de la potencia y la de la suma: $u' = 6x^2 - 5$ y $v' = 2x$.

3. Se aplica la regla del cociente $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{(6x^2 - 5)(x^2 + 1) - (2x^3 - 5x)(2x)}{(x^2 + 1)^2}.$$

4. Se desarrolla y se simplifica el numerador: $(6x^4 + x^2 - 5) - (4x^4 - 10x^2) = 2x^4 + 11x^2 - 5$, de modo que

$$f'(x) = \frac{2x^4 + 11x^2 - 5}{(x^2 + 1)^2}.$$

Teorema 3–3 Derivadas de funciones elementales

Para $a > 0$, $a \neq 1$, se tiene

$$\begin{aligned} (e^x)' &= e^x, & (a^x)' &= a^x \ln a, & (\ln x)' &= \frac{1}{x}, \\ (\sin x)' &= \cos x, & (\cos x)' &= -\sin x, & (\tan x)' &= \sec^2 x, \\ (\cot x)' &= -\csc^2 x, & (\sec x)' &= \sec x \tan x, & (\csc x)' &= -\csc x \cot x, \\ (\arcsen x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2}, \\ (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Cada fórmula se entiende en los puntos interiores del dominio de la función.

Ejemplo

25 Una combinación de funciones elementales

Derivemos $f(x) = 3e^x - 2\sin x + 5\ln x + \arctan x$, para $x > 0$.

1. Por las reglas de la suma y del múltiplo constante, se deriva cada sumando por separado y se conservan los coeficientes.

2. Derivadas exponencial y trigonométrica: $(e^x)' = e^x$ y $(\sin x)' = \cos x$.

3. Derivadas logarítmica e inversa: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (definida para $x > 0$) y $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

4. Reuniendo todo: $f'(x) = 3e^x - 2\cos x + \frac{5}{x} + \frac{1}{1+x^2}$.

4. Ejercicios: Cálculo de derivadas

R 4.1 Calcule la derivada de las siguientes funciones

$$1. f(x) = 2x^8 - 3x^5 + 5$$

$$2. f(x) = 3x^{4/3} - 6x^{2/3} - 2$$

$$3. g(z) = \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}$$

$$4. h(z) = 3z + \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{3}{\sqrt[3]{z}}$$

$$5. f(s) = (s^2 + s + 1)(s^2 + 2)$$

$$6. f(v) = (v^2 + 2v)(v + 1) - 6v^2 + 5$$

$$7. f(y) = \frac{6\sqrt{y^5} - 9\sqrt{y}}{3\sqrt{y^3}}$$

$$8. f(t) = \frac{40t^5 - t^3\sqrt{t}}{5t^2\sqrt{t}}$$

$$9. f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$10. f(t) = t^2 - \sqrt{3} + \frac{1}{3-t}$$

$$11. f(r) = \frac{\sin r}{1+r} - \frac{\cos r}{1-r}$$

$$12. f(u) = (2u - 5) \frac{u+1}{u+2}$$

$$13. f(p) = (1 - 2p)(3p + 2)(p^2 + 1)$$

$$14. f(x) = \frac{2}{x+1} \left(1 - \frac{3}{x+1} \right)$$

$$15. f(t) = \frac{4 - \frac{1}{1-t}}{t-2}$$

$$16. f(u) = \frac{u+1}{u-1} \cdot \frac{u^2+2}{5+u}$$

$$17. f(r) = \frac{(4r+6)(2+3r)}{r(1-2r)}$$

$$18. g(x) = 2x^{-2} \arctan x$$

$$19. g(x) = (\arccos x)(\arcsen x)$$

$$20. h(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

$$21. f(u) = \frac{1 + \ln u}{1 - \ln u}$$

$$22. f(u) = \frac{u \ln u}{1 - e^u}$$

$$23. f(z) = \sqrt[3]{z} \ln z$$

$$24. g(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$25. g(t) = \frac{\ln t}{t+1}$$

$$26. h(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

$$27. h(z) = \frac{e^z}{\arccos z}$$

$$28. h(z) = \frac{\operatorname{arccot} z}{\sqrt{z}}$$

5. Regla de la cadena

Teorema 5-4 Regla de la cadena

Si g es derivable en x y f es derivable en $g(x)$, entonces

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

En particular, si $u = u(x)$ es derivable,

$$(u^k)' = ku^{k-1}u', \quad (e^u)' = e^uu', \quad (a^u)' = a^u \ln(a)u', \quad (\ln|u|)' = \frac{u'}{u},$$

y al derivar una función trigonométrica o trigonométrica inversa de u , se multiplica su derivada exterior por u' .

Ejemplo

26

Dos aplicaciones encadenadas

Derivemos $f(x) = e^{\sin(3x)}$.

1. Se reconoce la composición: la función exterior es e^u con $u = \sin(3x)$.
2. Por la regla de la cadena, $f'(x) = e^u u'$, así que falta derivar $u = \sin(3x)$.
3. Esa derivada exige una segunda aplicación de la regla, ahora con $w = 3x$: $u' = \cos(3x) \cdot w' = 3 \cos(3x)$.
4. Sustituyendo: $f'(x) = 3 \cos(3x) e^{\sin(3x)}$. Conviene derivar *de afuera hacia adentro*, sin olvidar ningún factor.

6. Ejercicios: Regla de la cadena

 **6.1** Calcule la derivada de las siguientes funciones

1. $f(y) = \left[(y^2 + 3)^4 - 1 \right]^3$
2. $f(\theta) = \sin(5\theta) \sec^2(5\theta)$
3. $f(x) = \left(\frac{x-7}{x+2} \right)^3$
4. $f(t) = \frac{3t^4}{\sqrt{t^2 - 5t}}$
5. $f(x) = \frac{\tan^3(x) - 1}{\sin(x) + 2}$
6. $f(x) = e^{2x^2 - 5x + 3}$
7. $f(q) = (q - 3e^{q/3})^5$
8. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
9. $f(t) = \ln(t\sqrt{t^2 + 1})$
10. $f(p) = \ln \left[\frac{(p^3 - 1)e^{-p^2}}{\sqrt{1 - 5p}} \right]$
11. $f(z) = \sqrt{1 + \ln z} + \ln(1 + \sqrt{z})$
12. $f(x) = e^{3x} g(\ln^2 x)$, donde g es derivable.
13. $f(y) = \ln^2(2y + 6)$
14. $f(z) = \ln^2[\ln(2z^3 - 8z)]$
15. $f(x) = \frac{e^x + \tan(x + 1)}{\sin(2x)}$
16. $f(w) = \ln \left(\frac{\sqrt{w-1}}{w^3 \cos(w^2)} \right)$
17. $h(z) = \arccos^2 \left(\frac{e^{-z}}{z} \right)$
18. $f(x) = \arctan^3(\ln(x^2 + e^x))$
19. $h(x) = \ln(3^{g(x^3+4)} + 1)$
20. $f(x) = \frac{\sqrt{1 - 2x^2}(x + 3)}{(4x - 1)^2}$
21. $f(v) = \sqrt{\frac{(v-1)^3}{(2v+7)(5-v)^2}}$
22. $f(t) = t^{\ln t}$
23. $f(w) = e^w w^{1-w}$
24. $g(z) = \sec(e^{1-2z})$
25. $h(u) = e^{u \sin u} + \ln^3(3 - 2u^2)$
26. $h(u) = \cos^4(\sin(ku^3))$
27. $g(u) = \ln^2(\sin u) + \ln(1 - e^{2u})$
28. $g(u) = \ln(\sec(u^3) + \tan(u^3))$

 **6.2** Si f es una función derivable, obtenga la derivada de las siguientes funciones

1. $y = \frac{f(\ln z)}{ze^z}$

3. $y = f(w^{2n}) - [f(w)]^n$

2. $y = f(e^{-u}) e^{f(u)}$

4. $y = e^{4w} f(\ln^3 w)$

7. Valor Numérico

8. Ejercicios: Valor Numérico

 **8.1** Calcule el valor numérico que se indica

1. $(f \cdot g)'(2)$, dado que $f(2) = -1$, $g(2) = 3$, $f'(2) = 1$ y $g'(2) = -2$

2. $h'(-1)$, dado que $h(x) = x^2 p(x)$, $p(-1) = 4$ y $p'(-1) = 2$

3. $(f/g)'(5)$, dado que $f(5) = -2$, $g(5) = -1/2$, $f'(5) = 4$ y $g'(5) = 2$

4. $q'(4)$, dado que $q(x) = f(x)/\sqrt{x}$, $f(4) = -3$ y $f'(4) = 0$

5. Suponga que $f(5) = 4$, $g(5) = 2$, $f'(5) = -6$ y $g'(5) = 5$. Encuentre los valores de:

(a) $(f + g)'(5)$

(d) $(g/f)'(5)$

(b) $(f \cdot g)'(5)$

(e) $\left(\frac{f}{f-g}\right)'(5)$

(c) $(f/g)'(5)$

6. Dado que $q(6) = 2$, $p'(2) = -1$ y $q'(6) = 4$, determine: $(p \circ q)'(6)$.

7. Dado que $h(t) = \frac{f(3-t)}{t}$ donde f es alguna función con $f(1) = 3$ y $f'(1) = -1$, determine: $h'(2)$.

8. Dado que $h(x) = \sqrt{f(e^{x^2-x})}$, $f(1) = 4$ y $f'(1) = 6$, determine: $h'(0)$.

9. Dado que $g(y) = \ln f(2^y)$, $f(1) = \ln 2$ y $f'(1) = -3$, determine: $g'(0)$.

10. Si $H(x) = f(g(x))$ donde $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$ y $f'(6) = 7$, halle $H'(3)$.

11. Sean f y g funciones derivables. Si $H(x) = 2f(x) \ln(g(x))$, $g(x) > 0$, determine $H'(3)$ dado que $g(3) = e$, $g'(3) = -2$, $f(3) = 3$ y $f'(3) = 1/2$.

12. Sea g una función derivable tal que $g(1) = 3$ y $g'(1) = 2$. Determine:

a) $F'(0)$ si $F(x) = g(e^{ax}) \cdot e^{-ax}$, a constante real.

b) $H'(0)$ si $H(x) = [g(2^x)]^2 \cdot 2^{-x}$.

13. Sea f una función derivable, entonces:

- a) Si $x[f(x)]^3 + xf(x) = 6$ y $f(3) = 1$, hallar $f'(3)$.
- b) Si $[g(x)]^2 + 12x = x^2g(x)$ y $g(4) = 12$, hallar $g'(4)$
14. Sean f y g funciones tales que $f(5) = 4$, $g(5) = 2$, $f'(5) = -6$ y $g'(5) = 5$. Determine $(f \cdot g)'(5)$ y $\left(\frac{f}{f-g}\right)'(5)$.
15. Sea f una función derivable tal que $h(x) = x^2f(x) + \frac{f(x)}{x}$. Si se sabe que $f(1) = 2$ y $h'(1) = 5$, encuentre $f'(1)$.
16. Sea f una función derivable tal que $x[f(x)]^3 + xf(x) = 6$ y $f(3) = 1$. Halle $f'(3)$.

9. Conceptos teóricos

10. Ejercicios: Conceptos teóricos



10.1 Esta sección es para reforzar la teoría de derivación

- Si f es una función derivable y g una función tal que $g(x) = xf(x)$, utilice la definición para demostrar que $g'(x) = f(x) + xf'(x)$.
- Si f es una función derivable y g una función tal que $g(x) = 3f^2(x)$, utilice la definición para demostrar que $g'(x) = 6f(x)f'(x)$.
- Encuentre una función f y un número real a tales que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^6 - 64}{h} = f'(a)$.
- Suponga que f es una función que satisface la ecuación:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Suponga también que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Encuentre $f(0)$, $f'(0)$ y $f'(x)$.

- Suponga que la función $h(x)$ satisface $h'(x) = -xh(x)$. Muestre que la función $y = xh(x)$ satisface la ecuación:

$$xy' = (1 - x^2)y$$

- Sea g una función continua que cumple $g'(x) = \frac{1}{x}$. Muestre que $y = \frac{1}{1+x+g(x)}$ cumple la ecuación diferencial $xy' = y(yg(x) - 1)$.

- Verifique que si $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{1-x}\right) - \arctan x$, entonces $f'(x) = 0$.

8. Sea $f : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ para todo $x \neq 0$:

a) Verifique que $f''(x) = -f(x) \cdot \frac{1}{x^2}$.

b) Hallar condiciones sobre a, b, c tales que $ax^2 \cdot f''(x) + bx \cdot f'(x) + c \cdot f(x) = 0$ donde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

9. Si f es una función tal que $f'(x) = e^{-2x}$ y $u = \ln(x^2)$, utilice la regla de la cadena para demostrar que $\frac{d}{dx}[f(u)] = \frac{2}{x^5}$.

10. Encuentre $f'(x)$ si se sabe que $\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$.

11. Derivación implícita

Teorema 11–5 Derivación implícita

Si una ecuación que relaciona x e y define localmente a y como función derivable de x , se derivan ambos lados respecto de x , tratando $y = y(x)$ y aplicando la regla de la cadena a cada expresión que contiene y . Si la ecuación resultante tiene la forma $A(x, y) + B(x, y)y' = 0$, con $B(x, y) \neq 0$, entonces $y' = -A(x, y)/B(x, y)$.

Ejemplo

27

Derivada de una curva dada implícitamente

Calculemos y' si $x^3 + y^3 = 6xy$ (folio de Descartes).

1. Se deriva a ambos lados respecto de x , recordando que $y = y(x)$: cada vez que se deriva una expresión con y aparece el factor y' por la regla de la cadena.
2. Lado izquierdo: $3x^2 + 3y^2y'$. Lado derecho, con la regla del producto: $6y + 6xy'$.
3. Se agrupan los términos con y' a un lado: $3y^2y' - 6xy' = 6y - 3x^2$, es decir, $(3y^2 - 6x)y' = 6y - 3x^2$.
4. Se despeja, suponiendo $3y^2 - 6x \neq 0$: $y' = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} = \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$.

12.

Ejercicios: Derivación implícita



12.1 Calcule la derivada que se solicita.

1. $\frac{dz}{dx}$ en $(-3, 0)$, dado $x^2z + xz^2 = 3x + 9$.

3. $\frac{dz}{dw}$, dado $z^2 = \ln(w + z)$

2. $\frac{dx}{dt}$ en $(4, -4)$, dado $x + t + e^{x+t} = 1$

4. $\frac{dx}{dy}$, dado $4x \ln(2x + y) = 4$

R 12.2 Suponga que la ecuación $e^y = y^2 \cdot e^x$ define a y como función de x . Determine $\frac{dy}{dx}$ y $\frac{d^2y}{dx^2}$. En ambos casos exprese su respuesta sólo en términos de y .

R 12.3 Sabiendo que las ecuaciones siguientes definen a y como función implícita de la variable x , obtenga y' .

1. $x^3 - \sin y + x \ln^2 y = y e^{2x}$

2. $x + \cos x + xy^2 = e^y$

3. $x + e^{xy} - y^3 - y = 3$

13. Derivación logarítmica

Teorema 13–6 Derivación logarítmica

Si $y = u(x)^{v(x)}$ y $u(x) > 0$, la derivación logarítmica da

$$y' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Para productos y cocientes también puede usarse $(\ln |y|)' = y'/y$ junto con las propiedades de los logaritmos.

Ejemplo 28 Una potencia con base y exponente variables

Derivemos $y = x^{\sin x}$, para $x > 0$.

1. Ni la regla de la potencia ni la de la exponencial se aplican: la base y el exponente dependen de x . Se toma logaritmo: $\ln y = \sin x \ln x$.
2. Se deriva a ambos lados; a la izquierda, por la regla de la cadena, $(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, y a la derecha se usa la regla del producto: $\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$.
3. Se despeja y' multiplicando por y : $y' = y \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$.
4. Se sustituye $y = x^{\sin x}$: $y' = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$, que es la fórmula del teorema con $u = x$ y $v = \sin x$.

14. Ejercicios: Derivación logarítmica

R 14.1 Calcule la primera derivada de cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = (x+1)^{x^2}$

2. $g(x) = \sqrt{(2x)^x}$

3. $h(x) = (x^3 + x)^{3x-2}$

 **14.2** Utilice la derivación logarítmica para calcular la primera derivada de cada una de las funciones siguientes:

1. $y = \frac{(x+3)^2}{e^x \cos(x)}$

2. $h(x) = \frac{x^{\frac{3}{4}} \sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$

3. $f(x) = \frac{x^2(x^3-2)}{(5x^3+1)^2}$

15. Derivadas de orden superior

Definición 15–2 Derivadas de orden superior

Si f' es derivable, se define $f'' = (f')'$; sucesivamente, $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. También se escribe $f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$.

Ejemplo 29 Derivadas sucesivas y un patrón

Calculemos las primeras derivadas de $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

1. Primera derivada, con la regla de la potencia: $f'(x) = -x^{-2}$.
2. Segunda: se deriva f' , no f : $f''(x) = (-1)(-2)x^{-3} = 2x^{-3}$.
3. Tercera: $f'''(x) = 2 \cdot (-3)x^{-4} = -6x^{-4}$.
4. Se observa el patrón de signos y factoriales: $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$.

Teorema 15–7 Fórmula de Leibniz

Si f y g poseen derivadas hasta orden n , entonces

$$(fg)^{(n)} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} f^{(j)} g^{(n-j)}.$$

Ejemplo**30 Uso de la fórmula de Leibniz**

Calculemos la derivada de orden n de $h(x) = x^2 e^x$.

1. Se toma $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$, de modo que $h = fg$.
2. Las derivadas de f se agotan pronto: $f' = 2x$, $f'' = 2$ y $f^{(j)} = 0$ para $j \geq 3$; por eso la suma de Leibniz solo tiene tres términos.
3. Como $g^{(k)} = e^x$ para todo k , la fórmula da

$$h^{(n)} = \binom{n}{0} x^2 e^x + \binom{n}{1} 2x e^x + \binom{n}{2} 2 e^x.$$
4. Simplificando los coeficientes binomiales: $h^{(n)}(x) = e^x (x^2 + 2nx + n(n-1))$.

16. Ejercicios: Derivadas de orden superior

 **16.1** Calcule la derivada que se indica.

1. $\frac{d^3 z}{dq^3}$ si $z = e^{1-4q}$
2. $\frac{d^2 x}{ds^2}$ si $x = \frac{1-2s}{1+2s}$
3. $\frac{d^2 y}{dx^2}$ en $(-1, 4)$ si $x^2 - xy = 5$
4. y''' si $y = \frac{1-x}{1+x}$,
5. y'' si $y^3 + 3x + 7 = 6y$
6. y'' si $2y - y \ln y = 3x + 2$

17. Otros ejercicios**18. Ejercicios: Otros ejercicios**

 **18.1** Una ecuación diferencial es aquella en que interviene una función desconocida y sus derivadas. Resuelva los siguientes problemas relativos a ecuaciones diferenciales.

1. Considere la ecuación $f''(x) + 4 \cdot f'(x) + 4 \cdot f(x) = 0$. Pruebe que $f(x) = (3x - 5)e^{-2x}$ satisface la ecuación anterior.
2. Halle las constantes A , B y C tales que la función $y = Ax^2 + Bx + C$ satisfaga la ecuación:

$$y'' + y' - 2y = x^2$$

 **18.2** Sea $F(x) = f(x) \cdot g(x)$, donde f y g tienen derivadas de todos los órdenes.

1. Demuestre que $F''(x) = f''(x) \cdot g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x)$.
2. Encuentre fórmulas similares para $F'''(x)$ y $F^{(4)}(x)$.

 **18.3** Verifique que la función $y = e^{2x} + xe^{2x}$ satisface la ecuación $y'' - 4y' + 4y = 0$.

 **18.4** Verifique que la función $y = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x + 10e^{-x}$ satisface la ecuación $\frac{dy}{dx} + y = \sin x$.

 **18.5** Verifique que la función $g(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x}$ satisface la siguiente igualdad:

$$g''(x) + \frac{2}{x}g'(x) = -\pi^2 g(x)$$

 **18.6** Pruebe que para $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ se cumple que $(4x^3 + 4x)y'' = 4y'(1 - 3x^2)$.

 **18.7** De un polinomio de tercer grado $Q(x)$ se sabe que $Q(1) = 0$, $Q'(1) = 2$, $Q''(1) = 4$ y $Q'''(1) = 12$. Calcular $Q(2)$ (Sugerencia: Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$).

Aplicaciones de la derivada

1. Movimiento rectilíneo

Definición 1 – 1 Velocidad media y velocidad instantánea

Si $s(t)$ es la posición de un móvil en el instante t , la *velocidad media* en el intervalo $[t_1, t_2]$ es

$$v_m = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1},$$

es decir, la pendiente de la recta secante. La *velocidad instantánea* en t es la derivada

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h},$$

y la aceleración es $a(t) = v'(t) = s''(t)$. El signo de $v(t)$ indica el sentido del movimiento; su valor absoluto es la rapidez.

Ejemplo

31 Velocidad media frente a velocidad instantánea

Un objeto cae según $h(t) = 80 - 4.9t^2$ (altura en metros, t en segundos).

1. Velocidad media en $[1, 2]$: se evalúa la posición en los extremos, $h(1) = 75.1$ y $h(2) = 60.4$, y se calcula

$$v_m = \frac{60.4 - 75.1}{2 - 1} = -14.7 \text{ m/s}.$$

2. El signo negativo indica que el objeto baja; el valor 14.7 m/s es la rapidez media.
3. Velocidad instantánea: se deriva la posición, $v(t) = h'(t) = -9.8t$, de modo que $v(1) = -9.8$ m/s y $v(2) = -19.6$ m/s.
4. La velocidad media del paso 1 queda entre esos dos valores: es la pendiente de la secante, mientras que $v(1)$ y $v(2)$ son las pendientes de las tangentes en los extremos del intervalo.

2. Ejercicios: Movimiento rectilíneo

 **2.1** Un objeto se lanza hacia arriba desde cierta altura, y t segundos después su altura, en metros, es $h(t) = 40 + 6t - 4.9t^2$.

1. Calcule su velocidad promedio durante el primer segundo.
2. Calcule su velocidad promedio durante el intervalo $[1, 2]$.

3. Calcule su velocidad promedio durante el intervalo $[1, 1.01]$.
4. ¿Cuál es su velocidad instantánea 1 s después de ser lanzado?
5. ¿Con qué velocidad golpea el suelo?

(R) 2.2 Una piedra se deja caer desde un puente de 150m de altura, y t segundos después su altura, en metros, es $h(t) = 150 - 4.9t^2$.

1. Calcule su velocidad promedio para $3 \leq t \leq 4$.
2. Calcule su velocidad promedio para $3 \leq t \leq 3.1$.
3. Calcule su velocidad promedio para $3 \leq t \leq 3.001$.
4. ¿Cuál es su velocidad instantánea a los tres segundos?
5. ¿Con qué velocidad golpea el suelo?

(R) 2.3 Un objeto se deja caer desde cierta altura h_0 , en metros sobre el suelo, y t segundos después su altura, en metros, es $h(t) = h_0 - 4.9t^2$. Al caer al suelo su velocidad es de -15 m/s. ¿Desde que altura se dejó caer?

(R) 2.4 Un automóvil se dirige hacia una pared. El conductor aplica los frenos y t segundos después la distancia entre el automóvil y la pared es $d(t) = 40 - 18t + 2t^2$.

1. ¿Cuál es la velocidad del automóvil t segundos después de aplicar los frenos?
2. ¿Cuánto tiempo tardaría en detenerse si no choca antes?
3. ¿Cuánto tiempo tardaría en chocar con la pared si no se detiene antes?
4. ¿Chocará con la pared?

(R) 2.5 El espacio recorrido por un móvil viene dado por la ecuación $s(t) = 7t + 25$. Compruebe que la velocidad media es constante en cualquier intervalo.

3. Rectas tangentes y rectas normales

Sea una función $f(x)$ derivable en $x = a$. Consideremos el punto de tangencia $P(a, f(a))$.

- 1 Pendiente de la recta tangente:** Es la derivada de la función en el punto:

$$m_t = f'(a)$$

- 2 Pendiente de la recta normal:** Es la pendiente perpendicular a la tangente. Si $f'(a) \neq 0$:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{f'(a)}$$

Ecuaciones de las Rectas

- 1 Recta Tangente:** $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

- 2 Recta Normal:** $y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$

- 3 Caso especial:** Si $f'(a) = 0$, la tangente es la recta horizontal $y = f(a)$ y la normal es la recta vertical ($x = a$).

Ejemplo**32 Recta tangente y recta normal**

Hallemos las rectas tangente y normal a $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 4$.

1. Punto de tangencia: $P(4, f(4)) = P(4, 2)$.

2. Pendiente de la tangente: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, de donde $m_t = f'(4) = \frac{1}{4}$.

3. Recta tangente: $y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$, es decir, $y = \frac{x}{4} + 1$.

4. Recta normal: su pendiente es $m_n = -\frac{1}{m_t} = -4$, de modo que $y = -4(x - 4) + 2$, es decir, $y = -4x + 18$.

4. Ejercicios: Recta tangente, recta normal

4.1 Encuentre la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la curva: $f(x) = 1 - x^2$, en el punto $(2, -3)$. Grafique la parábola y sus respectivas rectas tangente y la normal.

4.2 Encuentre una parábola que tenga la ecuación $f(x) = ax^2 + bx$, cuya recta tangente en el punto $(1, 1)$ tenga por ecuación $y = 3x - 2$.

4.3 ¿Para qué valores de a y b la recta $2x + y = b$ es tangente a la parábola $f(x) = ax^2$ cuando $x = 2$?

4.4 Verifique que la recta $y = -x$ es tangente a la curva con ecuación $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$. Determine el o los puntos P de tangencia y encuentre la ecuación de la recta normal a la curva en el punto P .

4.5 Encuentre la ecuación de la recta normal a la curva $f(x) = x \ln x$ que sea paralela a la recta $2x - 2y + 3 = 0$. ¿En cuál punto la gráfica de $f(x)$ posee una recta tangente horizontal?

4.6 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado: $w = \frac{1}{\sqrt{2u + 5}}$ en $u = -2$.

4.7 Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

1. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ en $x = 8$.

2. $y = \sin x + 2 \cos x$ en $x = \pi/2$.

4.8 Encuentre los puntos donde la recta tangente a $y = 4u^2 - 5u + 6$ es paralela a la recta con ecuación $y = 7u - 2$.

4.9 Encuentre los puntos donde la recta tangente a $y = \frac{2x}{(3-x)^2}$ es paralela a la recta con ecuación $10x - y = 5$.

4.10 Encuentre los puntos donde la recta tangente a $y = e^{u^2+2u}$ es horizontal.

4.11 Encuentre la ecuación de la recta tangente a $3x^2 + 5y^2 = 48$ en $(-1, 3)$. (La ecuación anterior representa una elipse, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ donde a y b son los semiejes).

4.12 Encuentre la ecuación de la recta perpendicular a $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{6} = 0$ en $(3, -2)$. (la ecuación anterior representa una hipérbola).

4.13 Halle los puntos de la curva $f(x) = x^3 - 3x + 5$ en los que la recta tangente es perpendicular a la recta $y = -\frac{x}{9}$. ¿En cuáles puntos la gráfica de f posee rectas tangentes horizontales?

4.14 Determine la pendiente de la recta tangente a la curva C en el punto donde $x = 0$, donde su ecuación es $y = (2x + 1)(x^2 + 3x + 1)^{1/(x+1)}$.

4.15 Sea $f(x) = (x^3 - 4x^2)g(x)$. Se sabe que la ecuación de la recta normal a la curva de ecuación $y = g(x)$ en el punto de tangencia $(-2, 5)$ es $y = \frac{x}{4} + 5$. Determine $f'(-2)$.

4.16 Sea $y = f(x)$ definida por $f(x) = x^2 + 3\ln(x + 3)$. Determinar la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 0$. Verificar que la curva tiene otra recta tangente paralela a la recta anterior y determinarla.

4.17 Sea $g(x) = [f(x)]^4$ donde f es una función derivable en $\mathbb{R}$ tal que $f'(1) = -\frac{1}{2}$ y $f(1) = \frac{1}{2}$. Calcule una ecuación para la recta tangente a la gráfica de g en $x = 1$.

4.18 Encuentre las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la elipse $x^2 + 4y^2 = 36$ que pasan por el punto $(12, 3)$.

4.19 Hallar la derivada de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x < -1 \end{cases}$

y, si existe, hallar la ecuación de la recta tangente en $x = -1$.

5. L'Hôpital y formas indeterminadas

Teorema 5–1 Regla de L'Hôpital

Sean f y g derivables en un entorno perforado de a , con $g'(x) \neq 0$ en ese entorno. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = +\infty,$$

y si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finito o infinito), entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

El resultado vale también para $a = \pm\infty$ y para límites laterales. Las formas $0 \cdot \infty$ e $\infty - \infty$ se llevan a $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$ mediante álgebra; las formas 1^∞ , 0^0 e ∞^0 se tratan tomando logaritmo, es decir, escribiendo $u^v = e^{v \ln u}$.

Advertencia. La regla solo se aplica mientras el cociente sea indeterminado: si $\frac{f'}{g'}$ ya no lo es, hay que evaluar, no derivar otra vez.

Ejemplo**33 Una forma 1^∞**

Calculemos $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{1/x^2}$.

1. La base tiende a 1 y el exponente a $+\infty$: es la forma 1^∞ , que no se puede evaluar directamente.

2. Se toma logaritmo: si L es el límite buscado, entonces $\ln L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}$, que ahora es de la forma $\frac{0}{0}$.

3. Se aplica la regla: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 2x}{x \cos 2x}$, que sigue siendo $\frac{0}{0}$; derivando de nuevo (o usando $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$) se obtiene -2 .

4. Como $\ln L = -2$, se deshace el logaritmo: $L = e^{-2}$.

6. Ejercicios: L'Hôpital y formas indeterminadas

 **6.1** Calcule cada uno de los límites siguientes e indique la forma indeterminada que se presenta.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln x}{x^3 - 3x + 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \sqrt{2}}{x}$

3. $\lim_{v \rightarrow \pi/2} \sin(\cos v) \sec v$

4. $\lim_{r \rightarrow 0^+} (e^r - 1) \ln r$

5. $\lim_{r \rightarrow \pi/2} r \tan r - \frac{\pi}{2} \sec r$

6. $\lim_{q \rightarrow 0^+} q^{\left(\frac{3}{4 + \ln q}\right)}$

7. $\lim_{t \rightarrow (\pi/2)^-} (\tan t)^{2t - \pi}$

8. $\lim_{\theta \rightarrow (\pi/2)^-} (\sin \theta)^{\sec \theta}$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$
con r y t constantes, $t > 0$

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - x}{\sin^2(2x)}$

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

12. $\lim_{z \rightarrow +\infty} (ze^{1/z} - z)$

13. $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} (x - \pi/2)^{\cos x}$

14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos(3x) - e^{-x}}$

16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\ln(2x-1)}$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x)(\csc x)$

18. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 \sec x} \right)$

19. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\sin x)$

20. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(2x))^{1/x^2}$

21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^{x^2}$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}$

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx) + \tan(nx)}{\arctan(nx)}, n \neq 0.$

24. $\lim_{y \rightarrow 0} (e^{2y} - y)^{y^{-1}}$

25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2 \sin^2\left(\frac{2}{x}\right)}$

26. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1) \sin\left(\frac{\pi x}{x-1}\right)$

27. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - (1+x)}{x^n}, n = 1, 2, 3, \dots$

7. Conceptos teóricos

8. Ejercicios: Conceptos teóricos

8.1 Halle el error en los procedimientos siguientes:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

8.2 Sean a, b, c y d constantes tales que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + \sin(bx) + \sin(cx) + \sin(dx)}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$. Encuentre el valor de $a + b + c + d$.

8.3 ¿Para qué valores de a y b es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(2x)}{x^3} + a + \frac{b}{x^2} \right) = 0$$

8.4 ¿Para qué valor de a es verdadera la ecuación siguiente?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = e$$

8.5 Sea $f(x) = \begin{cases} |x|^x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Verifique que f es continua en $x = 0$.

9. Tasas de cambio relacionadas

Método para tasas relacionadas Cuando varias magnitudes que dependen del tiempo están ligadas por una ecuación, sus razones de cambio quedan ligadas al derivar esa ecuación respecto de t . El procedimiento es siempre el mismo:

- 1 identificar las variables y hacer un dibujo;
- 2 escribir una ecuación que las relacione *en todo instante* (Pitágoras, semejanza, áreas, volúmenes, razones trigonométricas);
- 3 derivar ambos lados respecto del tiempo, aplicando la regla de la cadena (cada variable aporta su factor $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, ...);
- 4 sustituir *al final* los valores del instante particular y despejar la razón desconocida.

Los valores numéricos del instante se sustituyen después de derivar; hacerlo antes convertiría en constantes a las magnitudes que están variando.

Ejemplo

34 Un problema de relaciones relacionadas

1. Una escalera de 4 m de longitud está apoyada en una pared vertical. Su extremo inferior resbala, alejándose de la pared a 25 cm/s. ¿A qué velocidad aumenta el ángulo entre la pared y la escalera cuando el extremo superior está 2 m sobre el suelo?

Solución. La pared y el suelo están en ángulo recto, entonces el contexto es el de un triángulo rectángulo. Sea θ el ángulo entre la pared vertical y la escalera. Como la escalera mide 4 m,

$$\sin \theta = \frac{x}{4}.$$

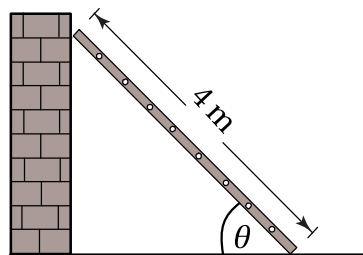
Ahora solo debemos derivar. En el widget se puede ver una animación del problema y en el “widget ampliado” se muestra una solución más ilustrativa. También tenemos una solución más abajo

10. Ejercicios: Tasas de cambio relacionadas

10.1 Resolver los siguientes problemas sobre tasas relacionadas:

1. Un hombre está parado en el borde de un muelle, remolcando hacia sí con una cuerda una lancha. él recoge la cuerda a 40 cm/s, y sus manos se mantienen 2 m más altas que el punto en que la cuerda

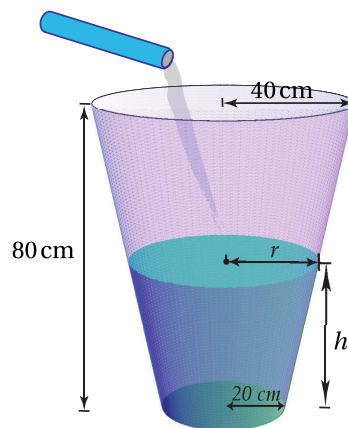
- está atada a la lancha. ¿A qué velocidad se acerca la lancha al muelle cuando le faltan 3 m para llegar?
2. Una piedra cae en una laguna, creando una onda circular que cree centrada en el punto de contacto. El radio de la onda aumenta a 30 cm/s. ¿A qué velocidad crece el área del círculo encerrado por la onda cuando su radio es 1 m?
3. Una esfera de hielo se derrite de manera tal que su superficie decrece a 2 cm^2 por minuto. ¿A qué velocidad disminuye el radio de la esfera cuando es 15 cm?
4. Un tanque cónico tiene su vértice abajo, y mide 2 m de altura y 2 m de radio en la parte superior. Por su extremo inferior está saliendo agua a razón de 25 m^3 por segundo. Al mismo tiempo, al tanque le entra agua por su parte superior a una tasa constante de litros por segundo. Si el nivel de agua desciende a 5 m/s cuando es igual a un metro, ¿A qué tasa le está entrando agua al tanque?
5. Una canoa de desagüe mide tres metros de largo, y sus extremos son triángulos isósceles de 10 cm de altura y 10 cm de base, con su vértice hacia abajo. Si la canoa está recibiendo agua a $50 \text{ cm}^3/\text{s}$ y esta agua no sale, ¿a qué velocidad aumenta el nivel del agua cuando ha alcanzado los 8 cm?
6. Una piscina mide 12 m de largo y 6 m de ancho. Su profundidad es 1.2 m en un extremo y 2.7 m en el otro extremo, aumentando en línea recta de un extremo al otro. Si se bombea agua en la piscina a 3 m^3 por minuto, ¿qué tan rápido sube el nivel del agua cuando es 1 m en el extremo más profundo?
7. Un avión vuela a una altura constante de 10 000 m sobre terreno horizontal, en línea recta y a velocidad constante. Un radar en tierra, delante del avión, percibe un ángulo de elevación que aumenta a 0.5° por segundo cuando el avión está a 14 km de distancia del radar. ¿Cuál es la velocidad del avión en kilómetros por hora?
8. De un tubo sale arena a razón de $16 \text{ dm}^3/\text{s}$. Si la arena forma una pirámide cónica en el suelo cuya altura es siempre $\frac{1}{4}$ del diámetro de la base, ¿con qué rapidez aumenta la altura de la pirámide cuando tiene 4 dm de altura?
9. Una escalera de 4 m se apoya contra un muro y su base se comienza a resbalar. Cuando la base está a 3,7 m del muro, la base se aleja a razón de 1.5 m/s.



- (a) ¿Cuál es la razón de cambio de la distancia entre el suelo y la parte superior de la escalera sobre el muro en ese instante?
- (b) ¿Cuál es la razón de cambio del área del triángulo formado por la escalera, el muro y el suelo en ese instante?

(c) ¿Cuál es la razón de cambio del ángulo θ entre la escalera y el suelo en ese instante?

10. Una mujer, en un muelle, tira de un bote a razón de 15 m/min sirviéndose de una soga amarrada al bote a nivel de agua. Si las manos de la mujer se hallan a 4,8 m por arriba del nivel del agua, ¿con qué rapidez el bote se aproxima al muelle cuando le falta por recoger 6 m de cuerda?
11. Un automóvil que se desplaza a razón de 9 m/s, se aproxima a un cruce. Cuando el auto está a 36 m de la intersección un camión que viaja a razón de 12 m/s cruza la intersección. El auto y el camión se encuentran en carreteras que forman un ángulo recto entre sí. ¿Con qué rapidez se separan 2s después de que el camión pasa dicho cruce?
12. Un avión vuela con velocidad constante, a una altura de 3000 m, en una trayectoria recta que lo llevará directamente sobre un observador en tierra. En un instante dado, el observador advierte que el ángulo de elevación del avión es de $\frac{\pi}{3}$ radianes y aumenta a razón de $\frac{1}{60}$ rad/s. Determine la velocidad del avión.
13. Se bombea agua a un tanque que tiene forma de cono truncado circular recto a una razón uniforme de 2 l/min (1 litro equivale a 1000 cm³). El tanque tiene una altura de 80cm y radios inferior y superior de 20 cm y 40 cm, respectivamente. ¿Con qué rapidez sube el nivel del agua cuando la profundidad es de 30 cm?



Nota: El volumen V de un cono truncado circular recto de altura h y radios inferior y superior a y b , respectivamente, viene dado por: $V = \frac{h\pi}{3} (a^2 + ab + b^2)$.

14. Una ardilla en la base de un árbol comienza a subirlo a razón de 2,5 m/s. Dos segundos después, un gato, situado a 36 m de la base del árbol, ve la ardilla y comienza correr hacia el árbol con una rapidez de 3 m/s. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre el gato y la ardilla 4s después de iniciada la persecución?
15. Una granja tiene un tanque de agua de forma cónica (invertido), de radio 6 m y 15 m de altura. El tanque se encuentra vacío, por lo que el administrador de la granja enciende una bomba que vierte agua en el tanque a razón de 10 m³/min, sin embargo no se percató de la existencia de un agujero en el fondo del tanque por donde se escapa el agua a razón de 0,5 m³/min. Determine a qué razón varía el nivel del agua cuando la profundidad es de 8,28 m.

16. Un controlador aéreo sitúa dos aviones (A y B) a la misma altitud, convergiendo en su vuelo hacia un mismo punto en el ángulo recto. El controlador detecta que el avión A viaja a 450 km/h y el avión B a 600 km/h.
- (a) ¿A qué ritmo varía la distancia entre los dos aviones, cuando A y B están a 150 km y 200 km, respectivamente, del punto de convergencia?
- (b) ¿De cuánto tiempo dispone el controlador para situarlos en trayectorias distintas?
17. Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados positivos y su vértice opuesto al origen está sobre la curva $y = 2^x$. En este vértice, la coordenada y aumenta a razón de 1 unid/s. ¿A qué velocidad aumenta el área del rectángulo cuando $x = 2$?

11. Extremos, crecimiento, decrecimiento y concavidad.

En un entorno I_c de $x = c$,

- si para todo $x \in I_c$, $f(x) \geq f(c)$, entonces $f(c)$ es el valor mínimo de f en I_c . Decimos que $(c, f(c))$ es *mínimo local*.
- si para todo $x \in I_c$, $f(x) \leq f(c)$ entonces $f(c)$ es el valor máximo de f en I_c . Decimos que $(c, f(c))$ es un *máximo local*.

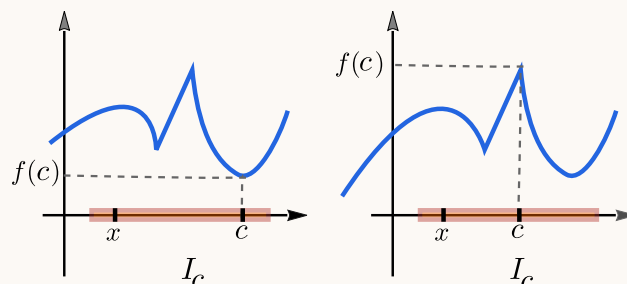


Fig. 5.1: Extremos locales de f en I_c

- 1 Un punto $x = c$ del dominio de f se dice *punto crítico* de f si $f'(c) = 0$ o si $f'(c)$ no existe

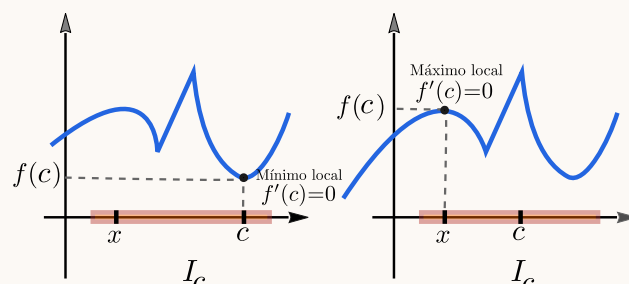


Fig. 5.2: Extremos locales en puntos críticos

- 2 Problema: hallar el valor máximo y/o el valor mínimo de una función continua f en un intervalo $[a, b]$.
- (a) f tiene un máximo y un mínimo en $[a, b]$
- (b) Para determinar el valor máximo o mínimo en $[a, b]$ se debe examinar
- los puntos críticos de f
 - los extremos $x = a$ y $x = b$

iii. los puntos en $[a, b]$ donde la derivada no está definida

- 3 La segunda derivada, si no se anula en un *punto crítico* $x = c$, decide el signo de $f(x) - f(c)$ en un entorno I_c , por eso nos ayuda a decidir si $(c, f(c))$ es un mínimo local o un máximo local.

La idea es que el signo de $f(x) - f(c)$ decide si se trata de un máximo o un mínimo local y usamos el hecho de que

$$f(x) - f(a) = (x - a)^2 \left(\frac{1}{2} f''(a) + \varepsilon(x) \right), \quad \text{donde } \varepsilon(x) = \frac{R(x)}{(x - a)^2} \rightarrow 0 \quad \text{si } x \rightarrow a$$

Es decir,

- si $f''(c) > 0$, $(c, f(c))$ es un mínimo local
- si $f''(c) < 0$, $(c, f(c))$ es un máximo local

En el widget podemos mover el punto con el deslizador y efectivamente ver como $P_2 = \frac{1}{2} f''(c)(x - c)^2$ decide el signo de $f(x) - f(c)$: o es < 0 o es > 0 en un entorno suficientemente pequeño de $x = c$.

Ejemplo

35 Extremos locales de f

Determinar los extremos locales y la concavidad de $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ en todo $\mathbb{R}$

1 Cálculo de las derivadas

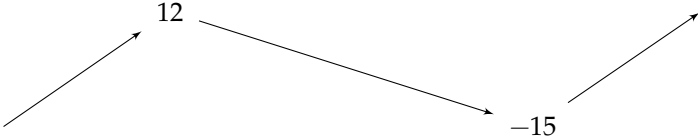
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$$

$$f''(x) = 12x - 6 = 6(2x - 1)$$

2 Puntos críticos y posible punto de inflexión

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \quad y \quad x = 2 \qquad f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

3 Tabla de signos de $f'(x)$ y $f''(x)$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$ 0 $-$		$-$ 0 $+$	
$f''(x)$		$- \cap$	$- \cap$ 0 $+$ $\cup$	$+$ $\cup$	
f					

4 Conclusiones

- Máximo local: $(-1, 12)$
- Mínimo local: $(2, -15)$
- Punto de inflexión: $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$
- Concavidad:
 - $f''(x) < 0$ para $x < \frac{1}{2}$: cóncava hacia abajo $\cap$
 - $f''(x) > 0$ para $x > \frac{1}{2}$: cóncava hacia arriba $\cup$

Teorema 11–2 Monotonía y concavidad

Sea f derivable en un intervalo I .

1. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I ; si $f'(x) < 0$, es decreciente.
2. *Criterio de la primera derivada:* si f' cambia de $+$ a $-$ al pasar por un punto crítico c , entonces $(c, f(c))$ es un máximo local; si cambia de $-$ a $+$, es un mínimo local; si no cambia de signo, no hay extremo.
3. Si $f''(x) > 0$ en I , la gráfica es cóncava hacia arriba ($\cup$); si $f''(x) < 0$, es cóncava hacia abajo ($\cap$).
4. Un punto donde la concavidad cambia se llama *punto de inflexión*. Que $f''(c) = 0$ no basta: debe haber cambio de signo de f'' en c .

Ejemplo**36** *Signo de f' y de f''*

Determinar los extremos locales y la concavidad de

$$f(x) = x^4 - 4x^3$$

en todo $\mathbb{R}$.

1 Cálculo de las derivadas

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3),$$

$$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

2 Puntos críticos y posibles puntos de inflexión

$$f'(x) = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = 3,$$

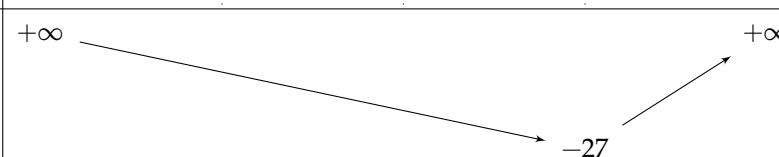
mientras que

$$f''(x) = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = 2.$$

Los valores correspondientes de la función son

$$f(0) = 0, \quad f(2) = -16, \quad f(3) = -27.$$

3 Tabla de signos de $f'(x)$ y $f''(x)$

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$	
f'(x)	—	0	—	—	0	+
f''(x)	+ ∪	0	— ∩	0	+ ∪	+ ∪
f	$+\infty$					$+\infty$

4 Conclusiones

- f es decreciente en $]-\infty, 3[$ y creciente en $]3, +\infty[$.
- En $x = 3$, f' cambia de negativo a positivo; por tanto,

$$(3, -27)$$

es un mínimo local y absoluto.

- En $x = 0$ no hay extremo local, aunque $f'(0) = 0$, porque f' no cambia de signo.
- Los puntos de inflexión son

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad (2, -16).$$

El primero es un punto de inflexión estacionario, pues además $f'(0) = 0$.

- Concavidad:

■ $f''(x) > 0$ en $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$: cóncava hacia arriba ∪.

■ $f''(x) < 0$ en $]0, 2[$: cóncava hacia abajo ∩.

12. Ejercicios: Extremos locales y concavidad

12.1 Sea $f(x) = x^2 + ax + b$. Encuentre los valores de a y b tales que $f(1) = 3$ sea un valor extremo de f en $[0, 2]$. ¿Este valor es máximo o mínimo?

12.2 Determine los valores de a y b de modo que la función $f(x) = 3ax^2 \cdot e^{bx^2+1}$ tenga un extremo relativo en el punto $(1, 2)$.

12.3 Halle una función de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que alcance extremos relativos en los puntos $(-2, 3)$ y $(1, 0)$. Verifique que en $(-2, 3)$ se alcanza un máximo relativo y en $(1, 0)$ un mínimo relativo.

12.4 A continuación se presentan ciertas afirmaciones, determine si cada una de ellas es verdadera o falsa, justificando su respuesta.

1. Sea f una función tal que $f'(c) = 0$, entonces necesariamente f tiene un máximo o un mínimo relativo en $x = c$.
2. Si f es una función continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) = f(1)$ entonces necesariamente existe un número real c tal que $-1 < c < 1$ y $f'(c) = 0$.
3. Si f es una función derivable en $[-1, 1]$ y $f(-1) = f(1)$ entonces necesariamente existe un número real c tal que $-1 < c < 1$ y $f'(c) = 0$.
4. Si f es una función tal que $f''(x) = 0$ entonces necesariamente $(2, f(2))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f .
5. Si (a, b) es un punto de inflexión de la gráfica de f entonces necesariamente (a, b) no puede ser extremo relativo de la gráfica de f .
6. Se puede encontrar una función f tal que $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$ para toda $x \in D_f$.
7. No se puede encontrar una función f , continua en $\mathbb{R}$ tal que $f(1) = -2$, $f(3) = 0$ y $f'(x) < 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

12.5 ¿Para qué valores de c el polinomio $P(x) = x^4 + cx^3 + \frac{1}{24}x^2$ tiene:

1. ¿Dos puntos de inflexión?
2. ¿Un punto de inflexión?
3. ¿Ningún punto de inflexión?

12.6 Encuentre los números críticos de la función.

1. $g(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$
2. $f(x) = xe^{2x}$

12.7 Encuentre los extremos absolutos de la función en el intervalo dado.

1. $g(r) = -3r^4 + 4r^3 + 72r^2$ en $[-3, 2]$.

3. $f(y) = y \ln y - 2y$ en $[1, 4]$.

2. $f(q) = \frac{q+1}{\sqrt{q^2+5}}$ en $[-2, 2]$.

4. $g(\theta) = \cos(4\theta)$ en $[-\pi/2, \pi/2]$.

12.8 Encuentre los intervalos donde la función es creciente o decreciente, y los extremos locales.

1. $g(z) = 5z^{2/3} + z^{5/3}$

4. $h(x) = x^2 + e^{4-x^2}$

2. $g(v) = \frac{v+1}{v^2+v+1}$

5. $h(t) = \ln(t^2 + 5)$

3. $f(p) = \frac{p^2 - 2p + 2}{p - 1}$

12.9 Determinar el valor de k que hace que la función $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un único extremo relativo. ¿Se trata de un máximo o un mínimo?

12.10 La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de derivada nula en $(1, 1)$ que no es extremo relativo. Razonar el valor de a , b y c

13. Trazo de curvas

Definición 13–2 Asíntotas

La recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de f si alguno de los límites laterales de f en a es $+\infty$ o $-\infty$. La recta $y = L$ es una *asíntota horizontal* si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$. La recta $y = mx + b$, con $m \neq 0$, es una *asíntota oblicua* si

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{y} \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

existen y son finitos. Una gráfica no puede tener a la vez asíntota horizontal y oblicua del mismo lado.

Ejemplo 37 Asíntotas de una función racional

Determinemos las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

1. Verticales: el denominador se anula en $x = 1$ y ahí el numerador vale $2 \neq 0$, así que $x = 1$ es asíntota vertical ($f \rightarrow -\infty$ por la izquierda y $f \rightarrow +\infty$ por la derecha).
2. Horizontales: el grado del numerador supera en 1 al del denominador, de modo que $f(x) \rightarrow \pm\infty$ y no hay asíntota horizontal.
3. Oblicua: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x(x - 1)} = 1$ y $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x + 1}{x - 1} = 1$.
4. Por lo tanto $y = x + 1$ es asíntota oblicua por ambos lados. (La división $\frac{x^2 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{2}{x - 1}$ da el mismo resultado de inmediato.)

14. Ejercicios: Trazo de curvas

14.1 Encuentre las ecuaciones de todas las rectas asíntotas de cada una de las funciones siguientes:

1. $f(z) = \frac{2z + 3 - z^2}{2z^2 - 3z - 9}$

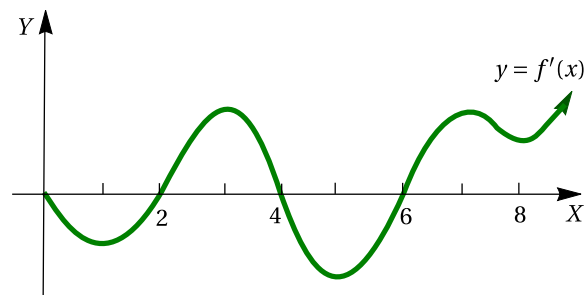
2. $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$

3. $h(w) = \frac{e^w + 1}{e^w - 1}$

4. $g(u) = u - 2 + \frac{u^2}{u+2}$

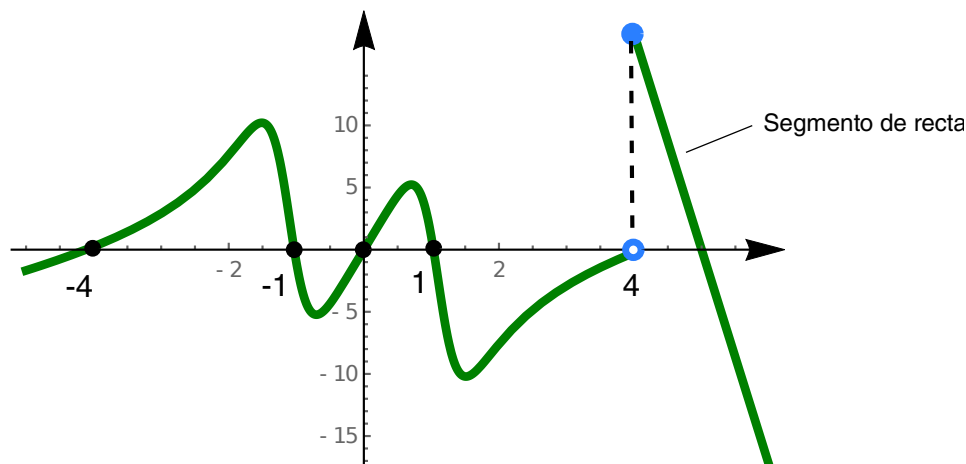
5. $f(x) = \frac{xe^x + 1}{e^x - 1}$

14.2 A continuación se muestra la gráfica de la primera derivada de f :



- ¿En qué intervalos crece la función f ? Explique.
- ¿En qué valores de x tiene f un máximo local? Explique.
- ¿En qué valores de x tiene f un mínimo local? Explique.
- ¿En qué intervalos es f cóncava hacia arriba? Explique.
- ¿En qué valores de x , posee f puntos de inflexión? ¿Por qué?

14.3 Considere la gráfica de la *primera derivada* de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si se sabe que f es **continua en todo su dominio**, entonces con base en la gráfica que sigue responda cada una de las preguntas que se plantean.



1. ¿En qué intervalos f decrece?
2. ¿En qué valores de x , f alcanza un máximo?
3. ¿En qué valores de x , f alcanza un mínimo local?
4. ¿En qué intervalos es f cóncava hacia abajo?
5. ¿En qué valores de x , f posee puntos de inflexión?
6. Realice un bosquejo de una posible gráfica para f .
7. Realice un bosquejo de una posible gráfica para f'' .



14.4 Trace una gráfica para cada función que cumpla las condiciones dadas en cada ejercicio.

1. Propiedades de la función f

- (a) $f(-4) = f(-2) = f(0) = f(2) = 0$, $f(-1) = -1$,
 - (b) $f(1) = 2$,
 - (c) $f'(-3) = f'(-1) = f'(1) = 0$,
 - (d) $f'(x) > 0$ si $x < -3$ o $-1 < x < 1$,
 - (e) $f'(x) < 0$ si $-3 < x < -1$ o $x > 1$,
 - (f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$
-

2. Propiedades de la función f

- (a) $\text{dom } f =]0, \infty[- \{2\}$,
 - (b) $f(1) = 1$,
 - (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$,
 - (d) $f'(x) > 0$ si $0 < x < 1$ o $x > 2$,
 - (e) $f'(x) < 0$ si $1 < x < 2$
-

3. Propiedades de la función f

- | | |
|---|---|
| (a) $D_f = \mathbb{R} - \{-3, 1\}$ | (g) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ | (h) $f(0) = -1$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ | (i) $f(-1) = 1$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ | (j) $f'(x) < 0 \forall x > 3$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 2$ | (k) $f'(x) = -1 \forall x \in]-3, -1[$ |
| (f) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$ | (l) l. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ existe. |

4. Propiedades de la función f

(a) $D_f = \mathbb{R} - \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

(d) $\lim_{x \rightarrow (-1/2)^-} f(x) = 0$

(e) $\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} f(x) = 1$

(f) $f'(x) > 0 \forall x \in]-\infty, -3[\cup \left] \frac{1}{2}, 2 \right[$

(g) $f'(-2) = 0$

(h) $f'(-1)$ no existe.

5. Propiedades de la función f

(a) $D_f = \mathbb{R}$

(b) f es derivable únicamente en $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$

(d) $f''(x) > 0, \forall x > 3$

(e) $f'' < 0, \forall x \in]-\infty, 2[- \{-1\}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$

(g) f es continua a la izquierda de 2.

(h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 0$

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) < 0$

(j) $f(2) = 2$

6. Propiedades de la función f

(a) $f'(-1) = 0, f'(1)$ no existe

(b) $f'(x) < 0$ si $|x| < 1, f'(x) > 0$ si $|x| > 1,$

(c) $f(-1) = 4,$

(d) $f(1) = 0,$

(e) $f''(x) < 0$ si $x \neq 1.$

 **14.5** Dados la gráfica de f' y algunos datos de f , bosqueje la gráfica de f .

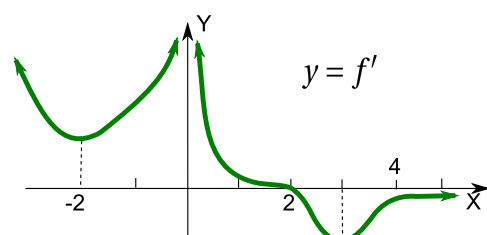
1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$

3. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

4. $f(-2) = f(1) = 0$

5. $f(3) = -1$



 **14.6** Realice el análisis completo y trace la gráfica, de cada una de las funciones siguientes:

1. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{4 - x^2}$

3. $g(x) = \sqrt{\frac{x}{x-3}}$

2. $f(u) = \frac{u^3 - 4}{u}$

4. $h(x) = \frac{3}{1 + e^{-x}}$

14.7 Determine las ecuaciones de todas las asíntotas a la gráfica de la función h definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{4x^3 + 2x}{x^2 + 1} & \text{si } x \leq -5 \\ \frac{3x^2 + 6x}{x^2 - 9} & \text{si } -5 < x \leq 0 \\ \arctan\left(\frac{3x-2}{1-3x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

14.8 Para cada una de las funciones siguientes:

- Verifique las derivadas dadas.
- Realice el análisis completo y trace la gráfica respectiva.

1. $f(x) = \frac{x^3 - 27}{8 - x^3}, \quad f'(x) = -\frac{57x^2}{(x^3 - 8)^2}, \quad f''(x) = \frac{228x(x^3 + 4)}{(x^3 - 8)^3}$

2. $r(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}, \quad r'(x) = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}, \quad r''(x) = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$

15. Problemas de Optimización

Estrategia para problemas de optimización

- 1 Hacer un dibujo y nombrar las variables; identificar la cantidad Q que se debe maximizar o minimizar.
- 2 Escribir Q en términos de las variables y usar las condiciones del problema (la *restricción*) para dejar Q como función de *una sola* variable.
- 3 Determinar el intervalo de valores admisibles de esa variable, según la geometría del problema.
- 4 Buscar los puntos críticos de Q y decidir con el criterio de la primera o de la segunda derivada; comparar también con los extremos del intervalo si son admisibles, y volver al enunciado para dar la respuesta pedida.

Ejemplo

38 Un problema de optimización

Hallar las dimensiones del trapecio isósceles de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de radio 4.

Solución.

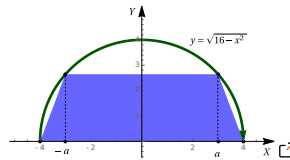


Fig. 5.3: Optimización del trapecio. Hacer clic para ir al widget

Ahora vamos a hacer el cálculo formal de ese valor de a en el que el área es máxima.

- 1 Modelo geométrico. Colocamos el semicírculo con centro en $(0,0)$ y radio $R = 4$, ecuación $x^2 + y^2 = 16$, $y \geq 0$. El trapecio isósceles tiene base mayor horizontal sobre el diámetro, base menor paralela arriba y vértices sobre la semicircunferencia.

- 2 Parámetro. Sea $2x$ la longitud de la base menor ($0 < x < 4$), entonces la altura h viene dada por

$$h = \sqrt{16 - x^2}.$$

- 3 Función área. Base mayor $= 2R = 8$. Área del trapecio:

$$A(x) = \frac{(\text{base mayor} + \text{base menor})}{2} \cdot h = \frac{(8 + 2x)}{2} \cdot \sqrt{16 - x^2} = (4 + x)\sqrt{16 - x^2}.$$

- 4 Optimización. Derivamos $A(x)$ y simplificamos:

$$A'(x) = \sqrt{16 - x^2} + (4 + x) \cdot \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - x^2 - x(4 + x)}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{16 - 4x - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}.$$

Igualemos $A'(x) = 0$ (numerador = 0):

$$2x^2 + 4x - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0.$$

$$\text{Solución positiva: } x = \frac{-2 + \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2.$$

- 5 Dimensiones del trapecio óptimo. Con $x = 2$:

$$\text{Base menor} = 2x = 4,$$

$$\text{Base mayor} = 8,$$

$$\text{Altura} = h = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

- 6 Área máxima.

$$A_{\text{máx}} = (4 + 2) \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

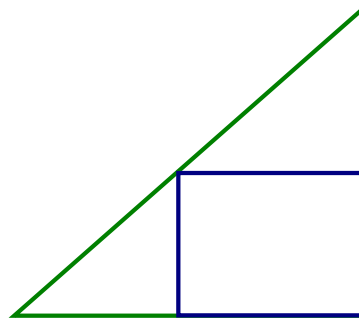
16. Ejercicios: Problemas de Optimización

16.1 Resuelva los siguientes problemas de optimización.

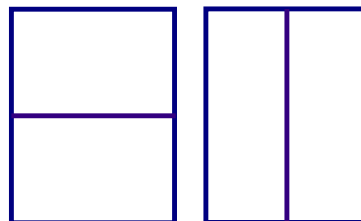
1. Se desea fabricar una caja sin tapa, de base cuadrada, cuyos materiales para los lados cuestan \$3 el dm^2 y, para el fondo, \$4 el dm^2 . ¿Cuáles son las dimensiones de la caja de volumen máximo que se

puede construir con un valor de \$48?

2. Halle el punto sobre la recta $6x + y = 9$, más cercano al punto $(-3, 1)$.
3. Un bote sale de un muelle a las 2 : 00 p.m. y viaja hacia el sur a una velocidad de 20 km/h. Otro bote ha estado enfilando hacia el este a 15 km/h y llega al mismo muelle a las 3 : 00 p.m. ¿En que momento estuvieron los dos botes más próximos?
4. Halle una ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, 5)$ y corta un área mínima en el primer cuadrante.
5. Una persona está en un punto X en la orilla de un río recto de 50 m de ancho, y quiere llegar a otro punto Y en la otra orilla del río, ubicado 75 m río abajo. Puede correr a 250 m/min por su lado del río para luego nadar a 30 m/min en línea recta hasta llegar a Y. Desestimando la corriente del río, ¿qué distancia debe correr antes de entrar al agua, y qué distancia nadar, de modo que minimice el tiempo total? ¿Cuánto es el tiempo mínimo?
6. Una pista de atletismo consta de una zona rectangular y un semicírculo en cada uno de sus extremos. Si el perímetro de la pista ha de ser 200 metros, calcular las dimensiones que hacen máxima el área de la zona rectangular. ¿Cuál es el área total de la pista?
7. Determine las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 12 cm, si el rectángulo tiene un vértice en el ángulo recto del triángulo y otro vértice en la hipotenusa del triángulo.



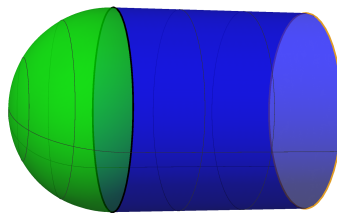
8. Se desea cercar una superficie de 60000 m^2 en forma rectangular, para después dividirla en dos mitades con una cerca paralela a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo y en qué dirección debe ir la división para minimizar el costo de la cerca?



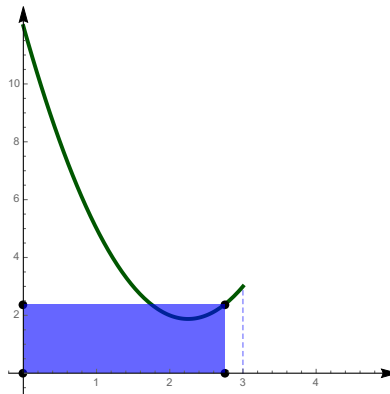
9. El interior de una pista de carreras de 800 metros consiste en un rectángulo con semicírculos en dos de sus extremos opuestos (en la figura, la pista es el perímetro). Encuentre las dimensiones que maximizan el área del rectángulo.



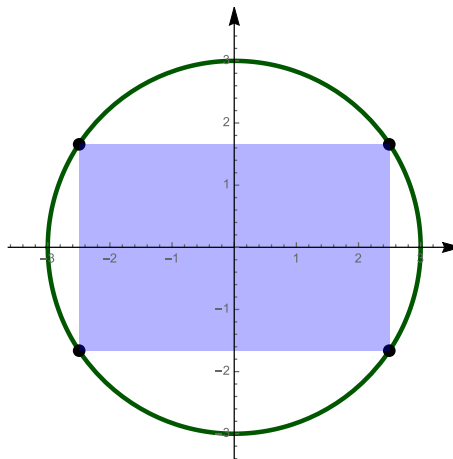
10. Una lata cilíndrica con tapa debe contener 225 cm^3 de líquido. EL costo por cm^2 de material es de 15 céntimos para el fondo y la tapa, y 10 céntimos para la pared lateral. ¿Qué dimensiones de la lata minimizan el costo de los materiales? ¿Cuál es el costo mínimo?
11. Un envase circular se construye poniendo una semiesfera en un extremo de un cilindro circular recto. El envase, incluyendo la semiesfera, debe tener una capacidad de 1.8 litros. ¿Cuáles dimensiones minimizan la cantidad de material requerido?



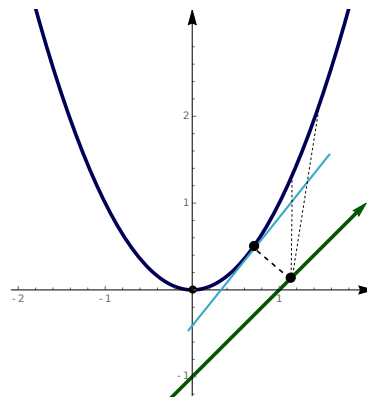
12. Un rectángulo tiene un vértice en $(0,0)$, un lado sobre el eje X y otro lado sobre el eje Y. El vértice opuesto a $(0,0)$ está sobre la parábola $y = 2x^2 - 9x + 12$ con $0 \leq x \leq 3$. ¿Cuál es el área máxima posible para el rectángulo?



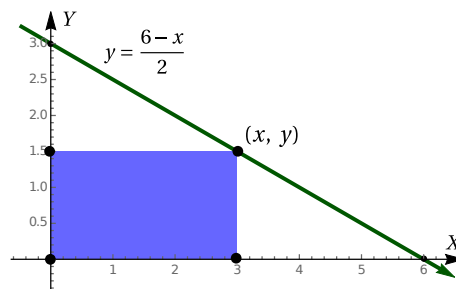
13. La ecuación $x^2 + y^2 = 9$ describe en el plano cartesiano una circunferencia de radio 3 con centro en el origen. ¿Cuál es el área del mayor rectángulo que se puede inscribir en esa circunferencia?



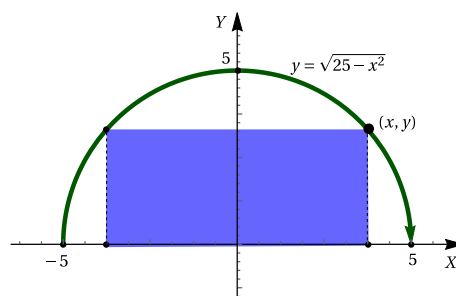
14. ¿Cuál es la distancia mínima entre la parábola P con ecuación $y = x^2$ y la recta R con ecuación $y = x - 1$?



15. ¿Cuál es el largo y el ancho que debe tener un rectángulo de 100 metros de perímetro para que su área sea máxima?
16. Hallar dos números positivos cuyo producto sea 192 y cuya suma sea mínima.
17. Con 10 metros de hilo se forman un círculo y un triángulo isósceles rectángulo. ¿Cuánto hilo hay que emplear en el círculo para que el área total encerrada por ambos sea máxima?
18. Una caja de base cuadrada y parte superior abierta debe tener un volumen de 32 dm^3 . Encuentre las dimensiones de la caja que minimicen la cantidad de material usado.
19. Un rectángulo está acotado por los ejes "x", "y" y por el gráfico de la ecuación $y = \frac{6-x}{2}$. ¿Cuál es el largo y el ancho que debe tener el rectángulo para que su área sea máxima?



20. Un rectángulo está limitado por el eje "x" y por el semicírculo $y = \sqrt{25 - x^2}$. ¿Cuál debe ser el largo y el ancho del rectángulo para lograr que su área sea máxima?



21. Si se cuenta con 1200 cm^2 de material para hacer una caja con base cuadrada y la parte superior abierta, encuentre el volumen máximo posible de la caja.

22. En un cartel rectangular los márgenes superior e inferior miden 6 cm cada uno y los laterales, 4 cm. Si el área del material impreso se fija en 384 cm^2 , ¿cuáles son las dimensiones del cartel de área mínima?

Integración

1. La integral indefinida

Definición 1 – 1 Primitiva e integral indefinida

Sea $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Una función $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una *primitiva* de f en D si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in D.$$

La familia de primitivas se denota por

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

donde C es una constante real.

Ejemplo

39 Primitivas: abusos de lenguaje y casos notables

Por abuso del lenguaje, es usual no indicar el conjunto donde la primitiva tiene sentido

1 $\int \frac{x}{|x|} dx = |x| + C (*)$

2 $\int |x| dx = \frac{1}{2}x|x| + C$

3 $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C (*)$

4 $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$

5 $\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x + C$

6 $\int \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$

7 Las funciones continuas en D tienen primitiva en D (como establece el Teorema Fundamental del Cálculo que está más adelante), pero esta primitiva *no siempre se puede expresar en términos de* funciones elementales. Por ejemplo

(a) $\int e^{-x^2} dx$

$$(b) \int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

$$(c) \int \frac{1}{\ln x} dx$$

(N) (*) Formalmente, como el dominio de $y = x/|x|$ y de $y = 1/x$ es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, las primitivas deberían escribirse con constantes distintas en cada *componente conexa*:

$$\int \frac{x}{|x|} dx = \begin{cases} x + C_1 & \text{si } x > 0, \\ -x + C_2 & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad \int \frac{1}{x} dx = \begin{cases} \ln(x) + C_1 & \text{si } x > 0, \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Teorema 1 – 1 Unicidad en intervalos y linealidad

Si F y G son primitivas de f en un intervalo I , entonces existe una constante C tal que $F(x) - G(x) = C$ para todo $x \in I$. En dominios con varias componentes conexas puede aparecer una constante distinta en cada componente. Además, para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\int [af(x) + bg(x)] dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx.$$

Ejemplo

40

Dos primitivas de la misma función

Verifiquemos que $F(x) = \operatorname{sen}^2 x$ y $G(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x)$ son primitivas de la misma función y comprobemos el teorema.

1. $F'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen}(2x)$, así que F es primitiva de $\operatorname{sen}(2x)$ en todo $\mathbb{R}$.
2. $G'(x) = -\frac{1}{2} (-2 \operatorname{sen}(2x)) = \operatorname{sen}(2x)$, de modo que G también lo es.
3. Según el teorema, ambas deben diferir en una constante. En efecto, con $\cos(2x) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$: $F(x) - G(x) = \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{2} (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) = \frac{1}{2}$.
4. Por eso $\int \operatorname{sen}(2x) dx$ admite las dos formas, que difieren solo en el valor de C : ninguna es “más correcta” que la otra.

2. Integrales básicas y sustitución

Teorema 2–2 Integrales básicas

En los intervalos donde las expresiones estén definidas,

$$\begin{array}{ll} \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C & (r \neq -1), \quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \\ \int e^x dx = e^x + C, & \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1), \\ \int \sin x dx = -\cos x + C, & \int \cos x dx = \sin x + C, \\ \int \sec^2 x dx = \tan x + C, & \int \csc^2 x dx = -\cot x + C, \\ \int \sec x \tan x dx = \sec x + C, & \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C, \\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C, & \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + C. \end{array}$$

Ejemplo**41****Linealidad más tabla de integrales básicas**

Calculemos $\int \left(3x^4 - \frac{2}{x} + 5e^x + \sec^2 x \right) dx$.

1. Por la linealidad, la integral de la suma es la suma de las integrales y las constantes salen fuera.
2. Con $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ ($r \neq -1$): $\int 3x^4 dx = \frac{3x^5}{5}$. Obsérvese que el caso $r = -1$ es justamente el segundo sumando, que *no* sigue esa fórmula.
3. Las otras tres son de la tabla: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$, $\int e^x dx = e^x$ y $\int \sec^2 x dx = \tan x$.
4. Se reúnen los resultados y se escribe una *sola* constante: $\frac{3x^5}{5} - 2 \ln|x| + 5e^x + \tan x + C$.

Teorema 2–3 Cambio de variable

Si $F' = f$ y $u = g(x)$ es derivable, entonces

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + C.$$

La sustitución debe transformar toda la integral, incluido el diferencial, en una expresión de la nueva variable.

Ejemplo**42****Cambio de variable**

Calculemos $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$.

1. Se busca en el integrando una función y su derivada: aparece $\ln x$ junto con $\frac{1}{x}$, que es exactamente $(\ln x)'$.
2. Se toma $u = \ln x$, de donde $du = \frac{dx}{x}$; el diferencial también queda transformado, como exige el teorema.
3. La integral se vuelve elemental: $\int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$.

4. Se regresa a la variable original: $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \frac{\ln^4 x}{4} + C$, para $x > 0$. Derivando se comprueba el resultado.

3. Ejercicios: Integrales básicas y sustitución

 **3.1** Calcule las siguientes integrales indefinidas

$$1. \int \frac{(w^2 - 2)(w^2 + 2)}{4w^3} dw$$

$$2. \int \frac{6^x - 4 \cdot 15^x}{3^{2x}} dx$$

$$3. \int \frac{(e^q - 1)(e^q + 1)}{e^q} dq$$

$$4. \int \frac{2^t - 1}{5 + t \ln 2 - 2^t} dt$$

$$5. \int (e^{u/2} + e^{-u/2})^2 du$$

$$6. \int \frac{u du}{(u^2 + 1)\sqrt{1 + \ln(u^2 + 1)}}$$

$$7. \int (5r^2 + \csc(r) \cot(r)) dr$$

$$8. \int \frac{(2v - 1)^2}{3\sqrt{v^3}} dv$$

$$9. \int \frac{(w^2 - 2)^2(w^2 + 2)}{3w^3} dw$$

$$10. \int \frac{24q}{4q^2 + 7} dq$$

$$11. \int \left(\frac{3}{z^2} - \frac{3z}{z^2 + 1} \right) dz$$

$$12. \int 3 \sec^2(u) (\tan(u + 5)) du$$

$$13. \int \sec^2(\alpha) \sqrt{5 + 2 \tan(\alpha)} d\alpha$$

$$14. \int \tan^2(\alpha) \sec^2(\alpha) \sin(\alpha) d\alpha$$

$$15. \int \frac{x + 1}{x - 1} dx$$

$$16. \int \frac{1}{1 + e^{-x}} dx$$

$$17. \int \sin(2x) \cos(2x) dx$$

$$18. \int \tan(x) \ln(\cos x) dx$$

$$19. \int x^x (1 + \ln x) dx$$

$$20. \int \frac{x + 1}{1 + x^2} dx$$

$$21. \int x \cos(x^2) dx$$

$$22. \int 5x \sqrt{1 + x^2} dx$$

$$23. \int \sin x \sqrt{1 + \cos x} dx$$

$$24. \int \frac{dx}{1 - \sin x}$$

$$25. \int \frac{u du}{\sqrt{3 + u^2}}$$

$$26. \int \frac{x + 3}{2x + 1} dx$$

$$27. \int \frac{2x^2 + 4x + 5}{x - 1} dx$$

$$28. \int \frac{z}{z + 1 - \sqrt{z + 1}} dz$$

29. $\int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$

34. $\int \frac{\sqrt{(x+3)^3}}{x+7} dx$

30. $\int \frac{\ln(\tan x)}{\sin x \cos x} dx$

35. $\int \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$

31. $\int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$

36. $\int \frac{1}{x - \sqrt[3]{x}} dx$

32. $\int \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx$

37. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx$

33. $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}+2} dx$

38. $\int 2y^3 \sqrt{9-y^2} dy$

4. Integración de potencias trigonométricas

Lema 4-1 Identidades trigonométricas Las identidades principales para integrar potencias trigonométricas son

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x, \quad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

Las dos primeras permiten dejar una sola función en el integrando cuando alguna potencia es impar; las dos últimas rebajan el exponente cuando todas las potencias son pares.

Ejemplo

43

Una potencia impar

Calculemos $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

1. El exponente de $\sin x$ es impar, así que se separa un factor: $\sin^3 x = \sin^2 x \cdot \sin x$.
2. Con la identidad $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ el integrando queda en términos de $\cos x$ y de un único $\sin x dx$: $(1 - \cos^2 x) \cos^2 x \sin x dx$.
3. Se sustituye $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$: $\int (1 - u^2) u^2 (-du) = \int (u^4 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C$.
4. Se vuelve a x : $\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$. (Si ambas potencias fueran pares, en lugar de esto se usarían las fórmulas de reducción con $\cos(2x)$.)

5.

Ejercicios: Integración de potencias trigonométricas



5.1 Calcule las siguientes integrales indefinidas

1. $\int (1 - \sin(2x))^2 dx$

7. $\int \sin^3(x) \sqrt{1 + \cos(x)} dx$

2. $\int \tan(x) \sec^3(x) dx$

8. $\int \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} dx$

3. $\int \frac{\sec^2(x)}{\cot(x)} dx$

9. $\int \tan^3 x \sec^4 x dx$

4. $\int \sec^3 z \tan^3 z dz$

10. $\int \sin^3(3x) dx$

5. $\int \frac{\sec^2 x}{4 + \tan x} dx$

11. $\int \cot^4 x dx$

6. $\int \frac{1 - \sin x}{\cos x} dx$

12. $\int \sec^4(5z) \tan^2(5z) dz$

6. Sustitución trigonométrica

Lema 6–2 Sustituciones trigonométricas Para radicales, con $a > 0$, se usan las sustituciones

$$\sqrt{a^2 - x^2} : x = a \sin \theta, \quad \sqrt{a^2 + x^2} : x = a \tan \theta, \quad \sqrt{x^2 - a^2} : x = a \sec \theta,$$

eligiendo el intervalo de θ de modo que los signos sean correctos. En cada caso el radical se simplifica con una de las identidades $1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta$, $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ o $\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$, y al final se regresa a la variable x con el triángulo rectángulo que define la sustitución.

Ejemplo

44 Un radical de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$

Calculemos $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}$.

1. El radical es del tipo $\sqrt{a^2 + x^2}$ con $a = 2$, de modo que se toma $x = 2 \tan \theta$, con $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, y $dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$.

2. Se simplifica el radical con $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$: $4 + x^2 = 4 \sec^2 \theta$, luego $(4 + x^2)^{3/2} = 8 \sec^3 \theta$ (positivo, pues $\sec \theta > 0$ en ese intervalo).

3. La integral se vuelve inmediata: $\int \frac{2 \sec^2 \theta}{8 \sec^3 \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int \cos \theta d\theta = \frac{\sin \theta}{4} + C$.

4. Se regresa a x con el triángulo de la sustitución ($\tan \theta = x/2$, hipotenusa $\sqrt{x^2 + 4}$): $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$, de donde el resultado es $\frac{x}{4\sqrt{x^2 + 4}} + C$.

7.

Ejercicios: Sustitución trigonométrica

 **7.1** Calcule las siguientes integrales indefinidas

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$2. \int \frac{r^2+1}{\sqrt{4-r^2}} dr$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{(4x^2-25)^3}}$$

$$4. \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}}$$

$$6. \int \frac{12}{\sqrt{9-(3x)^2}} dx$$

$$7. \int \frac{du}{u^4\sqrt{u^2-5}}$$

$$8. \int \frac{z+2}{\sqrt{3-2z-z^2}} dz$$

$$9. \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}$$

$$11. \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+3}} dx$$

$$12. \int \frac{\sqrt{9x^2-4}}{x} dx$$

$$13. \int \frac{x-3}{(x^2+2x+4)^2} dx$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-8}}$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$$

$$16. \int \sqrt{1-z^2} dz$$

$$17. \int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$$

8. Integración por partes

Teorema 8–4 Integración por partes

Si u y v son derivables, la regla del producto implica

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

La elección de u y dv debe hacerse de modo que la nueva integral $\int v du$ sea más sencilla que la original.

Ejemplo

45

Integración por partes

Calculemos $\int \arctan x \, dx$.

1. No hay ninguna sustitución evidente y el integrando es un solo factor; se escribe $u = \arctan x$ y $dv = dx$, con la idea de *derivar* el arcotangente.
2. Entonces $du = \frac{dx}{1+x^2}$ y $v = x$, de modo que $\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$.
3. La nueva integral sí es sencilla: con $w = 1 + x^2$, $dw = 2x \, dx$, se obtiene $\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.
4. Por lo tanto $\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$, que es el resultado que aparece en el ejemplo de la primera sección.

9. Ejercicios: Integración por partes

 **9.1** Calcule las siguientes integrales indefinidas

- | | |
|---|--|
| 1. $\int \frac{w+1}{e^w} \, dw$ | 11. $\int \ln(\sqrt{x}) \, dx$ |
| 2. $\int \log(5y^2 - 4y) \, dy$ | 12. $\int x \sec(x) \tan(x) \, dx$ |
| 3. $\int \arcsen(2y) \, dy$ | 13. $\int x \arctan(x) \, dx$ |
| 4. $\int (p-1)^3 e^{p^2-2p} \, dp$ | 14. $\int x^3 e^{-x^2} \, dx$ |
| 5. $\int \frac{te^t}{(t+1)^2} \, dt$ | 15. $\int \frac{x \arcsen(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ |
| 6. $\int \sec^3 x \, dx$ | 16. $\int e^{2\theta} \sin(3\theta) \, d\theta$ |
| 7. $\int \cos(\ln r) \, dr$ | 17. $\int w^2 e^{-w} \, dw$ |
| 8. $\int (3y^2 + 1) \ln(y^2 - 1) \, dy$ | 18. $\int \ln(\sqrt{x}) \, dx$ |
| 9. $\int w^3 \cdot 8^{w^2+1} \, dw$ | 19. $\int \cos(x) \ln(\sen(x)) \, dx$ |
| 10. $\int \frac{\ln z}{(z+1)^2} \, dz$ | 20. $\int \cos(x) \ln(\sen(x)) \, dx$ |

 **9.2** Calcule, usando integración por partes, $\int |x| dx$.

10. Fracciones parciales

Teorema 10–5 Fracciones parciales

Si P/Q es una función racional propia y Q se factoriza en factores lineales y cuadráticos irreducibles, P/Q puede descomponerse en una suma de fracciones simples. Para un factor lineal repetido $(x - a)^m$ se incluyen

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x - a)^m},$$

y para un factor cuadrático irreducible repetido $q(x)^m$, numeradores lineales sobre cada potencia de q . Si la fracción es impropia, primero se efectúa la división de polinomios.

Ejemplo 46 Factores lineales distintos

Calculemos $\int \frac{3x + 5}{(x - 1)(x + 2)} dx$.

1. La fracción es propia (grado 1 sobre grado 2), así que no hay que dividir, y el denominador ya está factorizado en dos factores lineales distintos.
2. Se plantea la descomposición $\frac{3x + 5}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$, es decir, $3x + 5 = A(x + 2) + B(x - 1)$.
3. Se evalúa en las raíces: con $x = 1$, $8 = 3A$ y $A = \frac{8}{3}$; con $x = -2$, $-1 = -3B$ y $B = \frac{1}{3}$.
4. Cada sumando es inmediato: $\int \frac{3x + 5}{(x - 1)(x + 2)} dx = \frac{8}{3} \ln|x - 1| + \frac{1}{3} \ln|x + 2| + C$.

11. Ejercicios: Fracciones parciales

 **11.1** Calcule las siguientes integrales indefinidas

1. $\int \frac{1}{x^4 - x^2} dx$

5. $\int \frac{26u - 34 + 2u^2}{(u - 2)^3(2u + 1)^2} du$

2. $\int \frac{3x^2 - 4x + 5}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx$

6. $\int \frac{u - 8}{u^2 - 2u - 8} du$

3. $\int \frac{p^3 + 14p^2 + 2}{4p^4 + 4p^3 - 7p^2 + 2p} dp$

7. $\int \frac{8 - 10w^2 - w^3}{8w + 2w^2 - w^3} dw$

4. $\int \frac{5z^3 - z^2 + 4z + 4}{(z^2 + z)(z^3 - z)} dz$

8. $\int \frac{-x^2 + x - 1}{(4 - x^2)(x - 5)^2} dx$

9. $\int \frac{9^x + 3^x + 6}{9^x - 3^x - 2} dx$

10. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} dx$

11. $\int \frac{1}{(x+5)^2(x-1)} dx$

12. $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$

13. $\int \frac{5x^2 + 3x + 12}{x^3 + 4x} dx$

14. $\int \frac{5x^2 + 12x + 1}{x^3 + 3x^2 - 4} dx$

15. $\int \frac{x+3}{2x+1} dx$

16. $\int \frac{2x^2 + 4x + 5}{x-1} dx$

12. Práctica General**13. Ejercicios: Práctica General****13.1** Calcule las siguientes integrales indefinidas

1. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} dx$

2. $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 4)^3}} dx$

3. $\int \frac{4x}{4x^2 + 4x + 5} dx$

4. $\int \frac{\ln(2x)}{\sqrt{x^3}} dx$

5. $\int \frac{3x+7}{\sqrt{6x-9x^2}} dx$

6. $\int \frac{x}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx$

7. $\int \frac{x^4 - 3x^3 + 2x - 3}{x^2 - 3x} dx$

8. $\int \frac{2x^2 + 7x - 1}{(x-2)(x^2+3)} dx$

9. $\int \frac{4x+5}{\sqrt{(x^2-2x+2)^3}} dx$

10. $\int \frac{\sqrt{4-\ln^2 y}}{y} dy$

11. $\int \frac{du}{e^u \sqrt{1+e^{2u}}} du$

12. $\int \frac{q+1}{q^3+q} dq$

13. $\int \frac{dq}{q^2(q^2+8)^{3/2}}$

14. $\int \frac{1+\sin t}{\cos t} dt$

15. $\int \frac{2t^2+3t-2}{3t^4-2t^3} dt$

16. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x} dx$

17. $\int \frac{\sin(7x) + \cos(7x)}{\sqrt{\sin(7x) - \cos(7x)}} dx$

18. $\int y^3 \cos(y^2) dy$

19. $\int \frac{x-3}{x^2+4x+6} dx$

20. $\int \frac{3 \cos x}{\sin^2 x + \sin x - 2} dx$

21. $\int \frac{4x^2 - 3x - 1}{x^3 - 7x^2 + 16x - 12} dx$

22. $\int \frac{dz}{z \cos(\ln(4z))}$

23. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

24. $\int \sec^4(1-u) \tan(1-u) du$

31. $\int \frac{y^2}{\sqrt{(1-y^2)^3}} dy$

25. $\int \frac{x+20}{\sqrt{(5-4x-x^2)^3}} dx$

32. $\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}} dx$

26. $\int x^2 \cdot a^x dx, a > 0$

33. $\int e^x \ln(e^x + 1) dx$

27. $\int \sqrt{e^x - 1} dx$

34. $\int \frac{x+1}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}} dx$

28. $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{x^2} dx,$

35. $\int \frac{5x - \sqrt{\operatorname{arcsen} x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

29. $\int \frac{\operatorname{arcsen} x}{x^2} dx$

36. (*) $\int \frac{\arctan(e^{-x})}{e^{-x}} dx$

30. $\int x \cos(3x) dx$

37. (*) $\int \ln(x^2 + 2x + 5) dx$

 **13.2** Verifique que $\int \frac{3}{1+2\sqrt{e^{-x}}} dx = 6 \ln|e^{x/2} + 2| + C.$

 **13.3** Verifique que $\int \frac{e^x(1+x \ln x)}{x} dx = e^x \ln x + C.$

 **13.4** (*) Verifique, utilizando integración por partes, las siguientes fórmulas de reducción:

1. $\int x^n \ln x dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} ((n+1) \ln x - 1) + C$ con $n \neq -1$

2. $\int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \cos(x) \cdot \operatorname{sen}^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2}(x) dx$

3. $\int \operatorname{sen}^2(x) dx = \frac{1}{2}(x - \operatorname{sen} x \cdot \cos x) + C$

 **13.5** Calcule las funciones que cumplen con las condiciones dadas

1. $p'(w) = 2w + 1, p(1) = 4$

2. $z''(r) = 6r^2 + 2 + r^{-2}, z'(-1) = -1, z(1) = \frac{1}{2}$

3. $q''(t) = 12t^2 - 12t - e^t, q'(1) = -1 - e, q(1) = 0$

 **13.6** (*) Determine una función f tal que $f(-1) = -3, f'(-1) = -10$ y $f''(x) = 24 + 4e^{2(x+1)}$

 **13.7** (*) Sea f una función cuya gráfica contiene el punto $(1, 6)$ y que la pendiente de su recta tangente en $(x, f(x))$ es $2x + 1$. Encuentre $f(2)$.

Integral definida

1. Integración definida

Idea intuitiva de la integral definida

Supongamos que f es una función continua y positiva en un intervalo I que contiene a 0 y al intervalo $[a, b]$, con $0 \leq a$, y sea R la región entre la curva f y el eje X desde 0 hasta $x \in I$. Vamos a denotar el área de la región R como $A(x)$

$$A(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Con esta definición, $A(0) = 0$

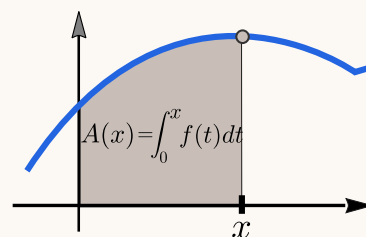


Fig. 7.1: Área bajo la curva

Idea intuitiva: Relación entre integración y derivación. Consideremos $A(x)$, el área de la región que va desde 0 hasta x .

Entonces, *para conectar con la derivada*, observemos la variación

$$A(x+h) - A(x)$$

Intuitivamente vemos que, según la figura 7.2, si $h > 0$ es pequeño esa variación es el área de una franja delgada que se parece a un rectángulo de base h y altura $f(x)$:

$$A(x+h) - A(x) \approx h f(x)$$

es decir, $\frac{A(x+h) - A(x)}{h} \approx f(x)$, y la aproximación es tanto mejor cuanto menor es h .

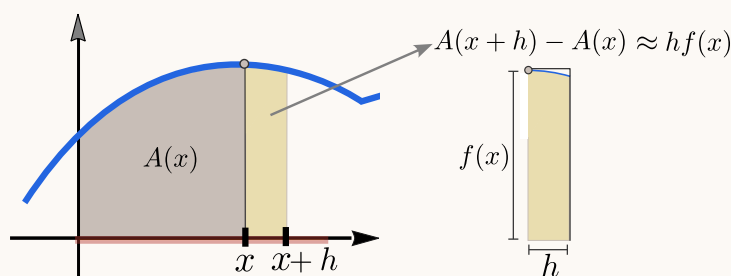


Fig. 7.2: $A(x+h) - A(x) \approx h f(x)$

Entonces si $h \rightarrow 0$, tendríamos que $A'(x) = f(x)$, es decir, **$A(x)$ es una primitiva de $f(x)$** : precisamente la que cumple $A(0) = 0$. (Formalmente, el teorema del valor medio para integrales da $A(x+h) - A(x) = h f(c)$ con c entre x y $x+h$, y la continuidad de f hace que $f(c) \rightarrow f(x)$ cuando $h \rightarrow 0$.)

Ahora, $\int_a^b f(x) dx = \int_0^b f(x) dx - \int_0^a f(x) dx = A(b) - A(a)$ (recuerde que en esta definición $A(0) = 0$.)

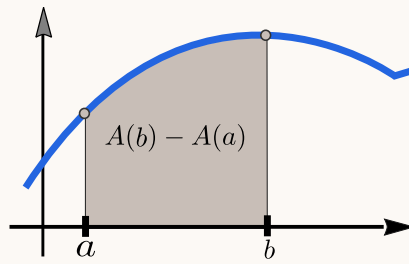


Fig. 7.3: $\int_a^b f(x) dx = A(b) - A(a)$

Ejemplo

47

Un caso en que $A(x)$ se puede calcular con geometría

Sea $f(t) = 2t$, continua y positiva para $t > 0$, y sea $A(x) = \int_0^x 2t \, dt$ con $x > 0$.

1. La región bajo la recta $y = 2t$ desde 0 hasta x es un triángulo de base x y altura $2x$, de modo que $A(x) = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2$.
2. Se cumple $A(0) = 0$, como pide la construcción.
3. Al derivar, $A'(x) = 2x = f(x)$: en efecto, A es una primitiva de f , tal como sugiere el argumento de la franja.
4. Y entonces $\int_1^3 2t \, dt = A(3) - A(1) = 9 - 1 = 8$, que coincide con el área del trapecio de bases 2 y 6 y altura 2.

Teorema 1 – 1 Propiedades de la integral definida

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g, \quad \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Además,

$$\int_a^a f = 0, \quad \int_a^b f = -\int_b^a f.$$

Si $f \leq g$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$; en particular, si $m \leq f(x) \leq M$, se cumple

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

Cambiar una función integrable en un número finito de puntos no modifica el valor de su integral. Si f es impar, $\int_{-a}^a f = 0$; si es par, $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$.

Ahora ya no dependemos de la derivada para integrar una función.

Ejemplo**48****Uso de las propiedades antes de integrar**

Calculemos $\int_{-2}^2 (x^3 + 3x^2) dx$ sin hacer todo el cálculo.

1. Por la linealidad, la integral se separa: $\int_{-2}^2 x^3 dx + 3 \int_{-2}^2 x^2 dx$.
2. La función x^3 es impar y el intervalo es simétrico, de modo que $\int_{-2}^2 x^3 dx = 0$: no hace falta calcularla.
3. La función x^2 es par, así que $\int_{-2}^2 x^2 dx = 2 \int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$.
4. Por lo tanto el valor es $3 \cdot \frac{16}{3} = 16$. (Como comprobación gruesa, en $[-2, 2]$ se tiene $0 \leq x^3 + 3x^2 \leq 20$, y 16 está entre $0 \cdot 4$ y $20 \cdot 4$.)

Teorema 1–2 Cambio de variable

Si g es derivable y f es continua en los valores recorridos por g , entonces

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Al cambiar la variable deben cambiarse también los extremos de integración.

Ejemplo**49****Cambio de variable con extremos**

Calculemos $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$.

1. Se reconoce la forma $f(g(x))g'(x)$ con $g(x) = \sin x$ y $f(u) = u^2$, pues $(\sin x)' = \cos x$.
2. Se sustituye $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ y se cambian los extremos: $x = 0$ da $u = 0$, y $x = \frac{\pi}{2}$ da $u = 1$.
3. La integral queda $\int_0^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$.
4. Al cambiar los extremos ya no hay que regresar a la variable x : el resultado es $\frac{1}{3}$. (Si se prefiere no cambiarlos, hay que deshacer la sustitución antes de evaluar.)

2. Ejercicios: Integración definida**2.1** Calcule las siguientes integrales

1. $\int_0^1 e^x (e^x - 1)^4 dx$

2. $\int_{-2}^3 (p^3(p - 4p^{-2})) dp$

3. $\int_{-\pi/2}^{\pi} \left[4 \cos r + \operatorname{sen} \left(r - \frac{\pi}{2} \right) \right] dr$

4. $\int_{-2}^{-2/\sqrt{3}} \frac{du}{u\sqrt{u^2 - 1}}$

5. $\int_1^5 |6 - 4u| du$

6. $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{(2 - x^3)^2} dx$

7. $\int_2^7 q\sqrt{q+2} dq$

8. $\int_1^2 \frac{v^2 + 3}{2v^3 + 18v - 5} dv$

9. $\int_0^{-1} \frac{x+1}{x+2} dx$

10. $\int_{\ln 3}^{\ln 8} e^r \sqrt{1 + e^r} dr$

11. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} 3 \sec^2 u (\tan u + 5) du$

12. $\int_1^9 \sqrt{s} \ln s ds$

13. $\int_{-\pi/6}^{\pi/6} z \cos 2z dz$

14. $\int_{-1}^0 w^3 8^{w^2+1} dw$

15. $\int_1^e (1 + \ln u)^2 du$

16. $\int_{-3}^0 \frac{\ln(4-7x)}{\sqrt{(4-7x)^3}} dx$

17. $\int_0^2 f(x) dx \text{ si } f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{si } -4 \leq x < 1 \\ x^5 & \text{si } 1 \leq x \leq 10 \end{cases}$

18. $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \text{ si } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

19. $\int_{-3}^3 (|2-x| + x^2) dx$

20. $\int_{-1/2}^0 \frac{5}{4x^2 + 4x + 5} dx$

21. $\int_0^4 |x^2 - 4x + 3| dx$

22. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x} dx$

23. $\int_{5/3}^{7/3} \frac{dx}{\sqrt{4-9(x-2)^2}}$

24. $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{r} dr$

(R) 2.2 Encuentre la fórmula para $g(u)$, dado que $g(0) = 1$ y que $g'(u) = \frac{1-u}{\sqrt{4-u^2}}$

(R) 2.3 Verifique que $\int_a^b f(x) dx = b - c$ si $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq x < c \\ k & \text{si } x = c \\ 1 & \text{si } c < x \leq b \end{cases}$

(R) 2.4 Verifique que $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen}(t)} \cos(t) dt = \int_0^1 \sqrt{x} dx$

(R) 2.5 Realice el cambio de variable $s = at$ para mostrar que

$$\int_0^x \frac{ds}{a^2 + s^2} = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) \quad \text{con } a \neq 0$$

Introducción: Sumas de Riemann en una variable

La idea de la integral de Riemann es que la integral definida no dependa de la derivada exclusivamente. La integral se define informalmente como el *límite* de la suma de las áreas orientadas de los rectángulos bajo la curva en $[a, b]$, cuando $\max(\Delta x_k) \rightarrow 0$.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

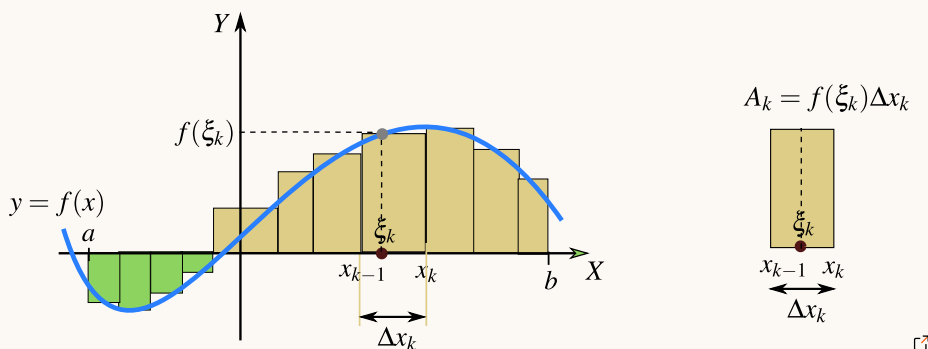


Fig. 7.4: Suma de Riemann S_n (hacer clic para ver el widget)

Funciones integrables en el sentido Riemann

- 1 Las funciones continuas en $[a, b]$ y también las funciones acotadas y continuas excepto en un conjunto de medida cero^a) de puntos en $[a, b]$, son integrables en el sentido Riemann
- 2 Cálculo: Si f es integrable en el “sentido Riemann”, entonces se puede calcular la integral con

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \frac{(b-a)}{n}$$

usando cualquier escogencia fija de los ξ_k : Puntos medios, extremo x_{k-1} , extremo x_k , etc.

- 3 **Teorema fundamental del cálculo.** Si f es integrable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Si g es continua en $[a, b]$ (por tanto integrable), entonces definimos la función G como

$$G(x) := \int_a^x g(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

Entonces G es continua en $[a, b]$ y $G'(x) = g(x)$ en $[a, b]$

^aUn conjunto tiene medida cero si, para cualquier $\epsilon > 0$, puede ser cubierto por una colección numerable de intervalos cuya suma de longitudes es menor que ϵ .

Hay varias nociones de ‘integral’ (como la Integral de Riemann, Darboux, Lebesgue, Gauge o Birkhoff, etc.), pero

en este libro usaremos exclusivamente la integral en el sentido de Riemann, ya que es suficiente para nuestros propósitos. Las demás nociones son generalizaciones de ésta o definiciones diseñadas en otro sentido para resolver problemas específicos.

Particiones. Una *partición* P del intervalo $[a, b]$ es cualquier conjunto finito de puntos:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

tales que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Esta partición divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, cuya longitud es $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

La *norma* de la partición P , denotada por $\|P\|$, se define como la longitud del subintervalo más grande:

$$\|P\| = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta x_k\}.$$

Decir que $\|P\| \rightarrow 0$ implica que *todos* los subintervalos se hacen arbitrariamente pequeños, condición necesaria para la definición rigurosa de la integral de Riemann.

Particiones regulares. Estas particiones son particiones “igualmente espaciadas”. Consideremos una partición “igualmente espaciada” del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$P = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$$

donde $\Delta x_i = |x_{i-1} - x_i| = \frac{b-a}{n} = \Delta x$, es decir, $x_k = a + k \cdot \Delta x$

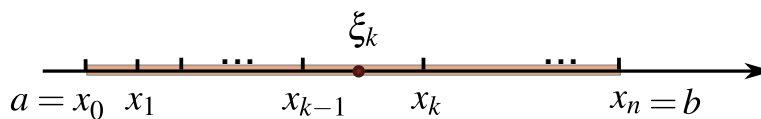


Fig. 7.5: Partición de $[a, b]$

Definición 3–1 Integral de Riemann

Sea f una función acotada definida en $[a, b]$. Se dice que f es integrable en el “sentido Riemann” en $[a, b]$ si existe un número I tal que para cualquier sucesión de particiones P_n con norma $\|P_n\| \rightarrow 0$ y cualquier elección de puntos de muestra $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, se cumple que:

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = I$$

donde $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ y $\|P\| = \max\{\Delta x_k\}$. La condición $\|P\| \rightarrow 0$ garantiza que todos los subintervalos se hagan arbitrariamente pequeños, sin exigir que sean iguales.

1 Si f es integrable, escribimos $\int_a^b f(x) dx = I$.

2 Convenio: $\int_a^a f(x) dx = 0$.

3 Convenio: $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

Ejemplo

50

Una suma de Riemann y su límite

Aproximemos $\int_0^1 x^2 dx$ con particiones regulares y extremos derechos.

1. Con n subintervalos, $\Delta x = \frac{1}{n}$ y $x_k = \frac{k}{n}$; tomando $\xi_k = x_k$, la suma es $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$.

2. Para $n = 4$: $S_4 = \frac{1 + 4 + 9 + 16}{64} = \frac{30}{64} = 0.46875$, que sobrestima el valor porque x^2 es creciente en $[0, 1]$.

3. Con la fórmula $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ se obtiene $S_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

4. Al hacer $n \rightarrow \infty$, $S_n \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, de modo que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$. Como f es continua, cualquier otra elección de los ξ_k (extremos izquierdos, puntos medios) da el mismo límite.

4. Ejercicios: Sumas de Riemann

4.1 Dadas la función y la partición P , estime la suma de Riemann para los puntos izquierdos, la suma para los puntos medios y la suma para los puntos derechos.

1. $f(u) = \sqrt{2u+4}$, $P = \{-2, -1.8, -1.6, -1.3, -1\}$

2. $h(z) = \begin{cases} 4-z^2 & \text{si } z \leq 3 \\ 5-z & \text{si } z > 3 \end{cases}$, $P = \{2, 2.5, 3, 3.02, 4, 5\}$

4.2 Dadas la función, el intervalo y el valor de n , estime la suma de Riemann de la función en el intervalo usando n subintervalos regulares para los puntos izquierdos, para los puntos medios y para los puntos derechos.

1. $f(t) = 3 \ln t$, intervalo $[1, 2]$, $n = 6$

2. $f(r) = r^2 \sqrt{1-r^2}$, intervalo $[-1, 1]$, $n = 8$

4.3 Calcule cada integral como límite de sumas de Riemann

1. $\int_0^3 (1-4v) dv$

3. $\int_{-1}^1 (2t - t^3) dt$

2. $\int_3^7 u(2u-5) du$

4. $\int_1^4 (2-3x) dx$

$$5. \int_{-1}^3 (x - x^2) dx$$

$$6. \int_0^2 (9 - 3x^2) dx$$

 **4.4** (*) Utilice sumas de Riemann para verificar que $\int_a^b x dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$

 **4.5** Sea f una función definida por $f(x) = x^2 + 1$. Utilizando 6 rectángulos, aproxime el área limitada por la gráfica de f y el eje X , en el intervalo $[1, 4]$

5. Teorema fundamental del cálculo

Teorema 5–3 (TFC)

1. Si f es R-integrable en $[a, b]$ y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

2. Si g es continua en $[a, b]$ (por tanto R-integrable), entonces definimos la función G como

$$G(x) := \int_a^x g(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

Entonces G es continua en $[a, b]$ y $G'(x) = g(x)$ en $[a, b]$

Ejemplo 51 *(Interpretación física).*

Si $s(t)$ es la distancia recorrida en un tiempo t por un objeto, entonces la velocidad instantánea es $v(t) = s'(t)$. Supongamos que conocemos la velocidad de un objeto que se mueve sobre una línea recta, en centímetros por segundo,

$$s'(t) = v(t) = t^2 - \frac{10}{(t+1)^2} \quad \text{y} \quad \int v(t) dt = s(t) + K$$

Es decir, s es una primitiva de v .

- 1 Como $v(0) = -10$, esto nos dice que en $t = 0$ el objeto se movía para atrás, a una velocidad de 10 cm/seg. Y a partir de $t \approx 1.34$ se empezó a mover hacia adelante.
- 2 Cinco segundos después, su velocidad era $v(5) = 24.72$ cm/seg. ¿Cuál fue la distancia recorrida hacia adelante cuando $t = 5$?

De acuerdo al TFC, la distancia *neta* recorrida es $\int_0^5 (t^2 - 10/(t+1)^2) dt = s(5) - s(0) \approx 33.3333$, es decir, el área neta de la región bajo la curva v nos da la distancia neta recorrida.

- 3 ¿Cuál es la distancia total recorrida (incluyendo el recorrido hacia atrás)?

Si $\int |t^2 - 10/(t+1)^2| dt = S(t) + K$, la distancia recorrida total es

$$\int_0^5 |t^2 - 10/(t+1)^2| dt = S(5) - S(0) \approx 43.1825$$

Corolario 2 (Extremos variables).

Si f es continua y u, v son derivables, entonces

$$\frac{d}{dx} \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \right] = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x).$$

Ejemplo 52 *Derivar una integral con extremos variables*

Calculemos $\frac{d}{dx} \left[\int_x^{x^2} e^{t^2} dt \right]$.

1. El integrando e^{t^2} es continuo, y los extremos $u(x) = x$ y $v(x) = x^2$ son derivables: se puede aplicar el corolario. (Obsérvese que no hace falta *calcular* la integral, que no tiene primitiva elemental.)
2. Aporte del extremo superior: $f(v(x))v'(x) = e^{(x^2)^2} \cdot 2x = 2x e^{x^4}$.
3. Aporte del extremo inferior, que va restando: $f(u(x))u'(x) = e^{x^2} \cdot 1$.
4. Por lo tanto la derivada es $2x e^{x^4} - e^{x^2}$.

Funciones definidas por una integral

Cuando una función f no tiene primitiva elemental, como es el caso de e^{-x^2} , $\frac{\sin x}{x}$, $\sqrt{1-x^4}$, etc., el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que *sí existe una primitiva* para f , aunque no podamos calcularla y, en ese caso, podemos definir una nueva función.

Por ejemplo,

$$1 \quad \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

$$2 \quad \operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$$

$$3 \quad F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \text{ (función elíptica)}$$

6. Ejercicios: Teorema fundamental del cálculo

6.1 Derive las siguientes funciones

$$1. F(t) = \int_t^5 \ln(6+y^2) dy$$

$$5. F(x) = \int_x^2 \cos(t^2) dt$$

$$2. F(t) = \int_4^{e^t} \ln u du$$

$$6. G(x) = \int_{x^2}^{x^3} \ln(t) dt, \quad x > 0$$

$$3. F(r) = \int_{-1}^{\sin(r\pi)} \sqrt[5]{w^2+1} dw$$

$$7. F(x) = \int_{1-3x}^1 \frac{u^3}{1+u^2} du$$

$$4. F(y) = \int_{e^y}^{\sqrt{y^3}} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha$$

6.2 Sea g una función integrable. Encontrar c , de modo que $\int_c^x g(t) dt = \cos(x) - \frac{1}{2}$

6.3 Sea f una función integrable; si f cumple que

$$\int_0^x f(t) dt = \int_x^1 t^2 f(t) dt + \frac{x^{16}}{8} + \frac{x^{18}}{9} + C, \quad \text{con } C \text{ constante}$$

1. Determine el criterio de f

2. Determine el valor de C , que satisface la igualdad anterior.

6.4 Encuentre una función f y un número a tales que $6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}$, $\forall x > 0$

6.5 (*) Verifique que la gráfica de $y = f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\mathbb{R}$, si $f(x) = \int_0^x \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}} dt$ con $a \neq 0$

6.6 Sea f una función tal que $\int_0^1 f(t) dt = 2$, $\int_0^4 f(t) dt = -6$ y $\int_4^3 f(t) dt = 1$. Hallar $\int_1^3 f(t) dt$

6.7 Sea f una función tal que $\int_1^4 f(t) dt = 6$, $\int_2^4 f(t) dt = 4$ y $\int_1^3 f(t) dt = 1$. Hallar $\int_2^3 f(t) dt$

6.8 Hallar todos los valores de x , tales que $\int_0^x (t^3 - t) dt = \frac{1}{3} \int_{\sqrt{2}}^x (t - t^3) dt$.

6.9 Si f es una función continua en $\mathbb{R}$ y $\int_0^4 f(x) dx = 20$, calcule $\int_0^2 f(2x) dx$.

6.10 Considere las funciones g y h definidas por $g(x) = \int_0^x f(u) du$ y $h(x) = \int_0^{g(x)} 3f(t) dt$ con f derivable tal que $f(0) = 2$. Calcule $h'(0)$.

7. Cálculo de áreas

Cálculo del área de una región

Teorema 7-4 Área mediante integrales

La integral $\int_a^b f(x) dx$ representa área con signo. El área geométrica entre la gráfica de f y el eje X es

$$A = \int_a^b |f(x)| dx.$$

El área entre dos curvas continuas $y = f(x)$ y $y = g(x)$ es

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Si las curvas cambian de orden, el intervalo se divide en sus puntos de intersección. También puede integrarse respecto de y , usando en cada tramo “curva derecha menos curva izquierda”.

Si una región R está entre dos funciones continuas f y g en un intervalo $[a, b]$, tal que $f(x) \geq g(x)$ en este intervalo, entonces el área de la región R , denotada A_R , es

$$A_R = \int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Ejemplo

53 Área de una región entre tres curvas

Calcule el área de la región sombreada entre las curvas $y = 1/4/(x+1)^2 + 2$, $y = 3 - x$, $y = 1/2/\sin x$ y $x = 0$, desde $x = -2$ hasta $x = 2$.

Solución. Usando el widget anterior, la región se subdivide en tres subregiones, cada una entre dos curvas.

- 1 La primera subregión R_1 va desde $x = -2$ hasta $x = 0$, entre $y = 1/4(x+1)^2 + 2$ y el eje X

$$A_{R_1} = \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{4}(x+1)^2 + 2 - 0 \right] dx$$

- 2 La segunda subregión R_2 , entre $y = 1/4(x+1)^2 + 2$ y $y = 1/2 \sin x$, va de 0 hasta $x = 2\sqrt{3} - 3$ pues

$$1/4(x+1)^2 + 2 = 3 - x \implies x = 2\sqrt{3} - 3 > 0$$

$$A_{R_2} = \int_0^{2\sqrt{3}-3} \left[\frac{1}{4}(x+1)^2 + 2 - \frac{1}{2} \sin x \right] dx$$

- 3 La tercera subregión R_3 entre $y = 3 - x$ y $y = 1/2 \sin x$, va de $x = 2\sqrt{3} - 3$ hasta $x = 2$

$$A_{R_3} = \int_{2\sqrt{3}-3}^2 \left[3 - x - \frac{1}{2} \sin x \right] dx$$

Entonces el área de la región está dada por

$$\begin{aligned} A_R &= \int_{-2}^0 \left[\frac{1}{4}(x+1)^2 + 2 - 0 \right] dx + \int_0^{2\sqrt{3}-3} \left[\frac{1}{4}(x+1)^2 + 2 - \frac{1}{2} \sin x \right] dx + \int_{2\sqrt{3}-3}^2 \left[3 - x - \frac{1}{2} \sin x \right] dx \\ &\approx 7.28039 \dots \end{aligned}$$

8. Ejercicios: Cálculo de áreas

8.1 Determine el área de la región limitada por:

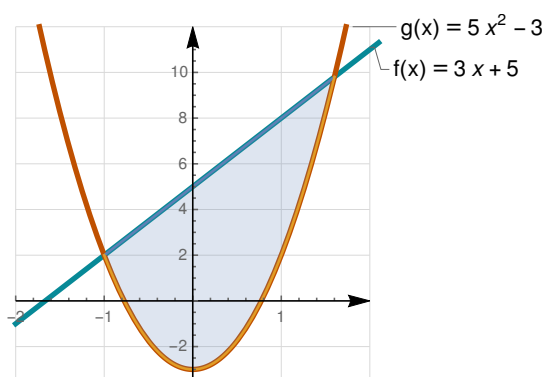
- $f(x) = x^3 + 2x$ y el eje X , desde $x = -1$ hasta $x = 3$.
- $x = y + 5$ y $x = \frac{y^2 + 2}{2}$.
- $y = 0$ y $y = 1 - x^2$ desde $x = -1$ hasta $x = 1$. Realice la representación gráfica de la región.
- $y = 0$ y $y = 2 - |x|$ desde $x = -2$ hasta $x = 2$. Realice la representación gráfica de la región.
- $y = x^2 - 4x + 3$ y $y = -x^2 + 2x + 3$. Realice la representación gráfica de la región.
- $y = x^3$, $x = -2$, $x = 4$.
- $y = |x|$, $x = -2$, $x = 2$.
- $y = x^2 + 1$, $y = x + 3$.
- $y^2 = -x$, $x - y = 4$, $y = 0$, $y = 2$.

- 8.2 Considere la función f definida por
$$\begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 16 - 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

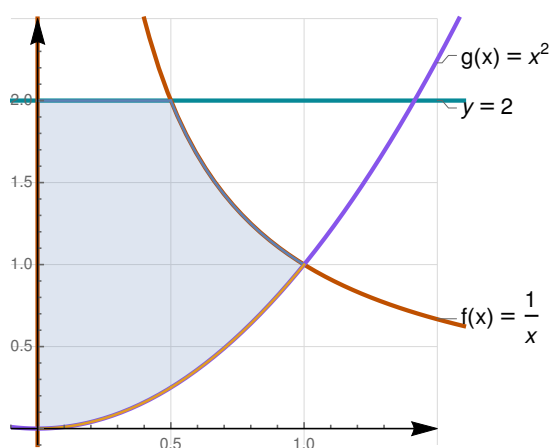
Determine el área de la región limitada por la gráfica de f , el eje X y la recta $x = 3$. Incluya un esbozo de la región.

- 8.3 Calcule el área de la región sombreada.

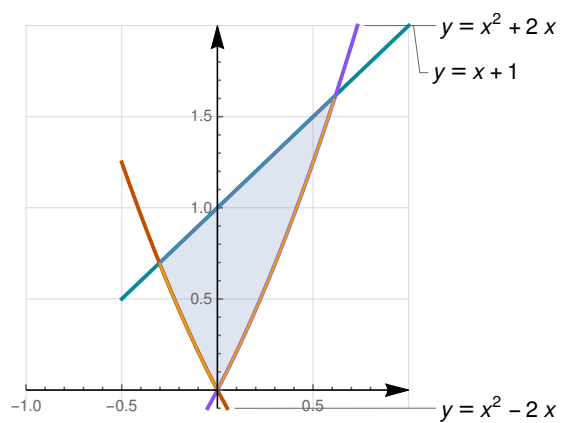
- 8.4 Calcule el área de la región sombreada.



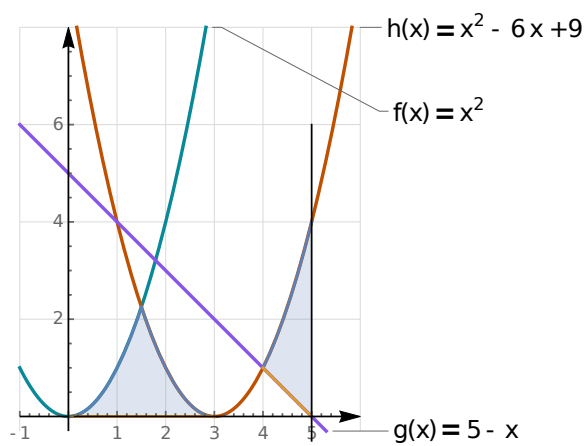
- 8.5 Calcule el área de la región sombreada.



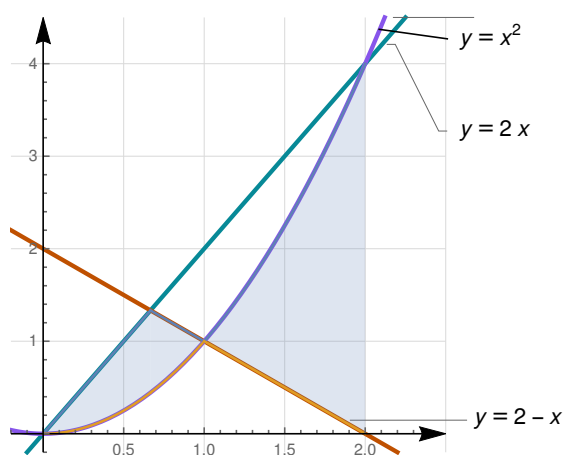
- 8.6 Calcule el área de la región sombreada.



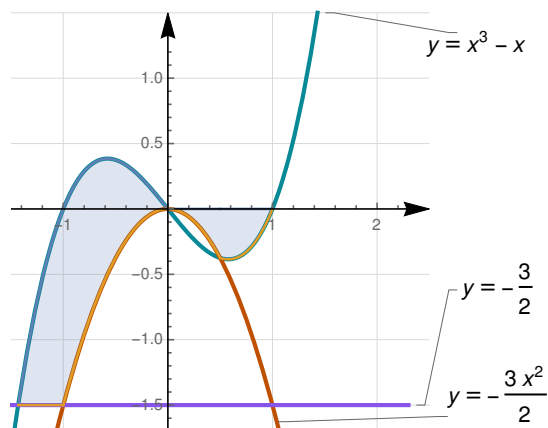
8.7 Calcule el área de la región sombreada.



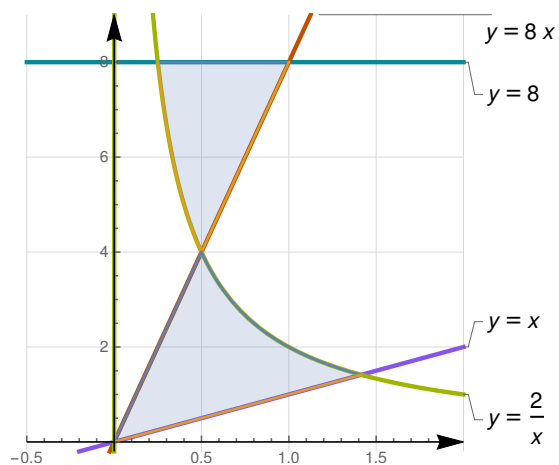
8.8 Calcule el área de la región sombreada.



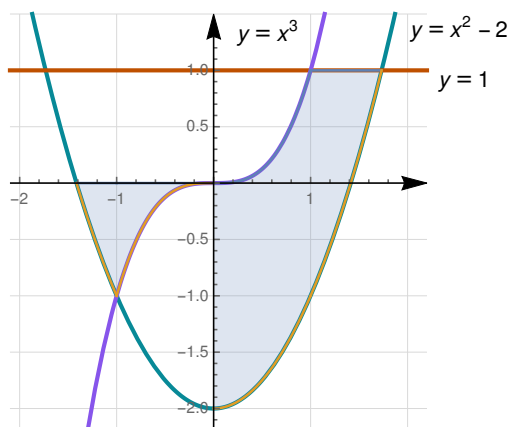
8.9 Calcule el área de la región sombreada.



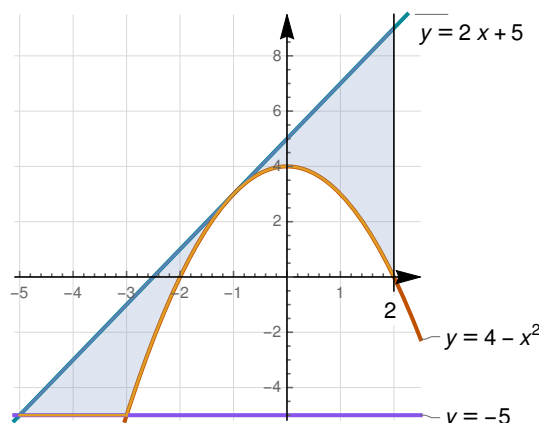
8.10 Calcule el área de la región sombreada.



8.11 Calcule el área de la región sombreada.



8.12 Calcule el área de la región sombreada.



9. Integrales impropias

Definición 9-2 Integral impropia

Las integrales sobre intervalos no acotados y las integrales cuyo integrando no es acotado se definen mediante límites. Por ejemplo,

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$$

cuando f no es acotada al acercarse a a . La integral *converge* si el límite correspondiente existe y es finito; en caso contrario, *diverge*. Si existe una singularidad interior, o si el intervalo es $(-\infty, +\infty)$, la integral se separa en dos integrales impropias y ambas deben converger.

Ejemplo

54 Una integral sobre un intervalo no acotado

Estudiamos $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

1. Por definición, se integra hasta un extremo finito b y luego se toma el límite: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2}$.

2. Se calcula la integral con extremo b : $\int_1^b x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b}$.

3. Se toma el límite: $\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$.

4. El límite existe y es finito, de modo que la integral *converge* y vale 1. (En cambio $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ *diverge*, porque $\ln b \rightarrow +\infty$.)

Teorema 9–5 Criterios básicos de convergencia

Para $p \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ converge si, y solo si, } p > 1, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \text{ converge si, y solo si, } p < 1.$$

Si $0 \leq f(x) \leq g(x)$ a partir de cierto punto, la convergencia de $\int g$ implica la de $\int f$, mientras que la divergencia de $\int f$ implica la de $\int g$.

Ejemplo**55****Los dos criterios**

Decidamos, sin calcularlas, si convergen $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ y $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

1. La primera es impropia en 0, donde el integrando no es acotado, y tiene la forma $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ con $p = \frac{1}{3}$.
2. Como $p < 1$, el criterio dice que *converge*. (Con $p = \frac{1}{3}$ el cálculo directo daría $\frac{3}{2}$.)
3. Para la segunda se busca una comparación: si $x \geq 1$, entonces $x^2 \geq x$ y por lo tanto $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$.
4. Como $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-1}$ converge, el criterio de comparación garantiza que $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ también converge, aunque su primitiva no sea elemental.

10.**Ejercicios: Integrales impropias**

10.1 Estudie la convergencia o divergencia de cada integral

1. $\int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{1-w^2}}$

7. $\int_{-\infty}^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta$

2. $\int_2^{10} \frac{dt}{\sqrt[3]{t-2}}$

8. $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx$ con $a \in \mathbb{R}$

3. $\int_{-\infty}^0 pe^p dp$

9. $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$

4. $\int_1^{\infty} \frac{dy}{y \ln y}$

10. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$

5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dr}{1+r^2}$

11. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$

6. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

$$13. \int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3y^2 + y - 1}} dy$$

$$15. \int_0^{\infty} x e^{-2|x|} dx$$

$$14. \int_{-2}^4 \frac{dx}{\sqrt{|x-2|}}$$

$$16. \int_0^1 \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) dx$$

Bibliografía

- [1] E. Agüero, J. Chavarría, J.J. Fallas. “Folleto de prácticas de Cálculo Diferencial e Integral”. ITCR, 2011
- [2] L. Acuña P. “Cálculo diferencial e integral”. Folleto, ITCR, 2016
- [3] P. García D. “Prácticas para Cálculo Diferencial e Integral”. ITCR
- [4] M. Gutiérrez M. “Prácticas para Cálculo diferencial e integral”. ITCR
- [5] M. Gutiérrez M. “Lógica Simbólica”. ITCR
- [6] Elsie Hernández S. *Cálculo Diferencial e Integral con Aplicaciones*. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática, Costa Rica. Publicado por la Revista digital Matemática, Educación e Internet.
- [7] W. Mora et al. *Apuntes y prácticas del curso de Cálculo (para computación). Selección de ejercicios*. Revista digital Matemática, Educación e Internet.
- [8] W. Mora et al. *Cálculo Diferencial e Integral: Práctica de Curso*. Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática.
- [9] S. Meneses R. “Prácticas para Cálculo Diferencial e integral”. Folleto. ITCR
- [10] C. Páez P. “Práctica General de CDI”. ITCR. 2015
- [11] C. Páez P. “Cálculo Proposicional 1”. Folleto. ITCR
- [12] G. Sanabria B. “Introducción a la Lógica”. Folleto ITCR

Solución de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

2.1

1 Sí. 2 Sí. 3 Sí. 4 Sí. 5 No.

2.2

1 $(P \wedge Q)$ 2 $P \rightarrow R$ 3 Q 4 $\neg P \rightarrow (\neg Q \wedge R)$ 5 $(\neg P \wedge \neg R) \rightarrow Q$ 6 $Q \equiv \neg P$ 7 $\neg(P \vee Q) \wedge R$

2.3

1 Si está lloviendo y el sol está brillando entonces hay nubes en el cielo. 2 No está lloviendo equivale a, el sol está brillando o hay nubes en el cielo. 3 Si no hay nubes en el cielo entonces el sol está brillando. 4 Si, siempre que está lloviendo hay nubes en el cielo, entonces el sol está brillando.

2.4

1 No está lloviendo o no hay nubes en el cielo. $\neg(P \wedge R) \equiv (\neg P) \vee (\neg R)$. 2 El Sol no está brillando y no hay nubes en el cielo. $\neg(Q \vee R) \equiv (\neg Q) \wedge (\neg R)$. 3 Está lloviendo. $\neg(\neg P) \equiv P$.

2.5

1 $l \wedge f, (\neg l) \vee (\neg f)$: “ayer no llovió o no hizo frío”. 2 $m \vee v, (\neg m) \wedge (\neg v)$: “Sandra no viene mañana ni el viernes”. 3 $(\neg a) \wedge (g \vee c), a \vee [(\neg g) \wedge (\neg c)]$: “el sujeto estaba armado, o no llevaba gorra ni capucha”. 4 $e \vee (r \wedge p), (\neg e) \wedge [(\neg r) \vee (\neg p)]$: “n no es entero, y no es racional o no es positivo”.

2.6

1 Todas las aves pueden volar. 2 Ningún día de 1998 cayó nieve en el Irazú. 3 Algún humano puede vencer a Superman. 4 Existe un $y \in \mathbb{R}$ tal que para todo $r \in \mathbb{R}$ se tiene que $r^2 \neq y$.

2.7

1 $d \rightarrow m$; “si no le hacen multa, no lo detuvieron”. 2 $[t \wedge (\neg e)] \rightarrow (\neg q)$; “si puedo hacer el quiz, entonces no llegé tarde o bien traje excusa”. 3 $\forall v \in D, te(v) \rightarrow vq(v)$; “cada vez que no me va bien en el quiz, no trasnoché estudiando”

2.8

1 Para la negación de la implicación, se utiliza la equivalencia, $\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$.

N: Soy listo y no soy millonario.

R: Si soy millonario, entonces soy listo.

C: Si no soy millonario, entonces no soy listo.

2

N: $2 + 2 = 4$ y $2 + 4 \neq 8$.

R: Si $2 + 4 = 8$, entonces $2 + 2 = 4$.

C: Si $2 + 4 \neq 8$, entonces $2 + 2 \neq 4$. 3

N: Juan llega demasiado pronto o María demasiado tarde, y el jefe no se molesta.

R: Si el jefe se molesta, entonces Juan llega demasiado pronto o María demasiado tarde.

C: Si el jefe no se molesta, entonces Juan no llega demasiado pronto ni María demasiado tarde. 4

N: Hay nubes en el cielo y el Sol no está brillando, e iré al estadio.

R: Si no iré al estadio, entonces hay nubes en el cielo y el Sol no está brillando.

C: Si iré al estadio, entonces no hay nubes en el cielo o el Sol está brillando. 5

N: a es un número real, $a > 0$ y $a^2 \leq 0$.

R: Si $a^2 > 0$, entonces a es un número real y $a > 0$.
 C: Si $a^2 \leq 0$, entonces a no es un número real o $a \leq 0$.

2.9 

1 Verdadera. 2 Falsa. 3 Verdadera. 4 Verdadera. 5 Verdadera. 6 Falsa.

4.1 

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

4.2 

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

x	y	z	$\neg z$	$y \vee \neg z$	$x \wedge (y \vee \neg z)$
V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F
F	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F

4.3 

Considere p = "Soy el presidente de CR" y q = "Vivo en Zapote".
 Sea $A = [(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg p$	A
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V

4.4 

Sea $A = p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	A
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F	F	V

4.5 

1 Falsa, ya que t es verdadera, con lo cual su negación es falsa y por tanto la conjunción ($\wedge$) entre las proposiciones es una proposición falsa. 2 Verdadera, ya que como r es verdadera las disyunciones ($\vee$) entre las proposiciones son proposiciones verdaderas.

4.6 

1 Falsa. 2 Verdadera. 3 Verdadera.

4.7

1 Sea $A = (p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$

p	q	$\neg q$	$p \leftrightarrow \neg q$	$q \rightarrow p$	A
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F

2 Sea $A = (p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q)$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \vee q$	A
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

3 Sean: $A = (p \vee \neg r) \wedge (p \vee r)$

$B = (q \rightarrow p) \wedge (q \vee p)$

$C = [(p \vee \neg r) \wedge (p \vee r)] \wedge [(q \rightarrow p) \wedge (q \vee p)]$

p	q	r	$\neg r$	$p \vee \neg r$	$p \vee r$	$q \rightarrow p$	$q \vee p$	A	B	C
V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	F	V	F	F	F	F

4.8

1 Sea $A = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$

P	Q	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	A
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Es una tautología.

2 $B = (P \wedge Q) \rightarrow (P \vee \neg Q)$

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee \neg Q$	B
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	V	V

Es una tautología.

3 Sea $A = (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$P \rightarrow Q$	$\neg Q \rightarrow \neg P$	A
V	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Es una tautología.

4 Sea $B = [(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \rightarrow P$

P	Q	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$	B
V	V	F	V	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F

Es una contingencia.

4.9  

1 No. 2 Sí. 3 No.

4.10  

1 Sí. 2 Sí. 3 Sí.

4.11  

Verdadera.

4.12  

$\neg[\neg[p \vee (\neg q \rightarrow p)]] \vee (q \wedge \neg p)$

Sea $A = \neg\neg[p \vee (\neg q \rightarrow p)] \vee (q \wedge \neg p)$.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow p$	$p \vee (\neg q \rightarrow p)$	$q \wedge \neg p$	A
V	V	F	F	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	F	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F	F

Note que: $\neg[\neg[p \vee (\neg q \rightarrow p)]] \equiv p \vee (\neg q \rightarrow p)$

4.13  

$[(\neg p \vee q) \wedge \neg q] \rightarrow \neg p$ es una tautología

6.1  

1 $\exists x \in A : nv(x)$, donde $A = \{\text{aves}\}$ y $nv(x)$ significa “x no puede volar”. 2 $\exists d \in A_{1998} : n(d)$, donde $A_{1998} = \{\text{días de 1998}\}$ y $n(d)$ significa “el día d cayó nieve en el Irazú”. 3 $\forall t \in T : s(t) = 180^\circ$, donde $T = \{\text{triángulos}\}$ y $s(t)$ es la suma de los ángulos de t. 4 $\forall y \in \mathbb{R}, \exists r \in \mathbb{R}, r^2 = y$. 5 $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$. 6 $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$.

6.2  

1 V. El recíproco: “Si $x^2 > 0$ entonces $x \in \mathbb{R}$ y $x > 0$ ”: F. 2 V. Recíproco: “Si $n \neq 0$, entonces existe $1/n$ ”: V. 3 V. Recíproco: “Si $t^2 = 9$, entonces $t = 3$ o $t = -3$ ”: V. 4 F. Recíproco: “Si todos los triángulos son redondos, todos los cuadrados son rectángulos”: V.

6.3  

1 Falsa. 2 Falsa.

6.4  

1 Falsa. 2 Verdadera.

6.5  

1 $\forall x : x+7 \geq y$ 2 $\exists x : \neg p(x) \vee \forall y : \neg q(y)$ 3 $\forall x \in \mathbb{Z} : x^2 \neq x$ 4 $(\exists y) p(y) \wedge (\exists x) q(x)$. 5 $(\forall x) (p(x)) \wedge (\exists x) (\neg q(x))$

6.6  

Sea $M(x, y)$ la proposición “x es mayor que y”. Las premisas son $\forall x \forall y [M(x, y) \rightarrow \neg M(y, x)]$ y $M(2, 1)$. Por particularización universal, $M(2, 1) \rightarrow \neg M(1, 2)$; por modus ponens se obtiene $\neg M(1, 2)$. Por tanto, el razonamiento es válido.

5
1 **Plan:** Como queremos obtener P, la idea es ver si podemos inferir $\neg(R \wedge S)$ para obtener, por MT, $\neg(\neg P \vee \neg Q) \equiv P \wedge Q$ en la primera premisa y concluir lo que necesitamos.

Primero usamos MT en (2) y (3): $R \rightarrow T, \neg T \therefore \neg R$,

Para negar $(R \wedge S)$ usamos adición y DM: $\neg R \therefore \neg R \vee \neg S \equiv \neg(R \wedge S)$,
 Tenemos, usando MT, $(\neg P \vee \neg Q) \rightarrow (R \wedge S), \neg(R \wedge S) \therefore \neg(\neg P \vee \neg Q)$
 Usamos DN, DM y simplificación: $\neg(\neg P \vee \neg Q) \equiv P \wedge Q, \therefore P$

8.1

1

3.	x	S 1
4.	y	SD 2, 3
5.	$y \vee (\neg z)$	A 4

2

4.	$\neg q$	MT 2, 3
5.	p	SD 1, 4

3

3.	c	S 2
4.	$\neg(a \vee d)$	MT 1, 3
5.	$(\neg a) \wedge (\neg d)$	DeMorgan
6.	$\neg d$	S 5

8.2

1

1. $M \rightarrow N$
2. $N \rightarrow O$
3. $(M \rightarrow O) \rightarrow (N \rightarrow P)$
4. $(M \rightarrow P) \rightarrow Q$
5. $M \rightarrow O$ SH1,2
6. $N \rightarrow P$ MP3,5
7. $M \rightarrow P$ SH1,6
8. Q MP4,7

2

1. $Q \vee T$
2. $Q \rightarrow R$
3. $\neg R$
4. $\neg Q$ MT2,3
5. T SD1,4
6. $T \vee S$ Adi5

8.3

De $\neg(q \rightarrow r)$ se obtiene $q \wedge \neg r$, luego q y $\neg r$. Por modus tollens en $(p \wedge q) \rightarrow r$, se sigue $\neg(p \wedge q)$; por De Morgan, $\neg p \vee \neg q$. Como q , por silogismo disyuntivo resulta $\neg p$. De $s \vee p$ y $\neg p$ se obtiene s , y de $s \rightarrow t$ se concluye t por modus ponens.

8.4

Es válido. Sean M : “es mamífero”, O : “toma oxígeno del aire” y B : “necesita branquias”. De $M \rightarrow O$ y $M \wedge V$ se obtienen M y luego O ; de $O \rightarrow \neg B$ se concluye $\neg B$.

8.5   El argumento no es válido: falta la premisa “sigue lloviendo”. Por ejemplo, sean L: sigue lloviendo, R: el río crece, P: el puente es arrastrado, C: un camino basta y E: los ingenieros se equivocaron. Con $L = R = P = E = F$ y $C = V$, todas las premisas $L \rightarrow R$, $(L \wedge R) \rightarrow P$, $P \rightarrow \neg C$ y $C \vee E$ son verdaderas, pero la conclusión E es falsa.

8.6  

1. $E \rightarrow S$
2. $\neg T \rightarrow \neg J$
3. $E \wedge J$
4. E Simp3
5. S MP1,4
6. J Simp3
7. $\neg\neg T$ MT2,6
8. T DN7
9. $T \wedge S$ Adj8,5

8.7  

$P : x + 2 < 6$

$R : x < 4$

$S : y < 6$

$Q : x + y < 10$

Las premisas se pueden reescribir de la siguiente forma:

1. $P \rightarrow R$
2. $S \vee \neg Q$
3. $Q \wedge P$
4. Q Simp3
5. P Simp3
6. R MP1,5
7. S SD2,4
8. $R \wedge S$ Adj6,7

8.8  

De las premisas 1, 2 y 3, por dilema constructivo, se obtiene $(2x^2 = 18) \vee (2x^2 = 18)$ y, por idempotencia, $2x^2 = 18$. Al aplicar modus ponens con la premisa 4, se concluye $x^2 = 9$.

8.9  

Paso	Fórmula	Ley / Regla
a.	$\neg(p \wedge q)$	Premisa
b.	$\neg q \rightarrow r$	Premisa
c.	$s \rightarrow \neg r$	Premisa
d.	$\neg s \rightarrow \neg(p \vee \neg q)$	Premisa
e.	$\neg p \vee \neg q$	DM De Morgan en a.)
f.	$\neg s \vee \neg r$	IM Implicación material en c.)
g.	$\neg r \rightarrow q$	CP Contraposición en b.)
h.	$\neg(p \vee \neg q) \vee q$	DC f,d,g
i.	$(\neg p \wedge q) \vee q$	DM + DN en h.)
j.	q	AB Absorción en i.)
	$\neg p$	SD Silogismo disyuntivo: e.) y j.)

8.10  

1. $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
2. $D \rightarrow A$
3. B
4. D
5. A MP4,2
6. $B \rightarrow C$ MP1,5
7. C MP6,3
8. $\neg D \vee C$ Adi 7
9. $D \rightarrow C$ ID8

8.11  

1

1. $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$
2. $r \rightarrow t$
3. $\neg t$
4. $\neg r$ MT3,2
5. $\neg r \vee \neg s$ Adi4
6. $\neg(r \wedge s)$ DM5
7. $\neg(\neg p \vee \neg q)$ MT1,6
8. $p \wedge q$ DM y DN7
9. p Simp8

2

1. $(R \vee Q) \rightarrow \neg T$ Premisa
2. $\neg Q \vee R$ Premisa
3. $P \vee Q$ Premisa
4. $P \rightarrow (R \wedge S)$ Premisa
5. $Q \rightarrow R$ ID2

6. $\neg P \vee (R \wedge S)$ ID4
7. $(\neg P \vee R) \wedge (\neg P \vee S)$ Distributividad6
8. $\neg P \vee R$ Simp7
9. $P \rightarrow R$ ID8
10. $R \vee R$ DC3,9,5
11. R Idempotencia10
12. $R \vee Q$ Adi11
13. $\neg T$ MP1,12
14. $\neg T \vee U$ Adi13
15. $\neg(T \wedge \neg U)$ DM y DN14

Soluciones del Capítulo 2

2.1 

1 3. 2 2. 3 3. 4 1. 5 2. 6 0. 7 1. 8 2.

2.1 

1 1. 2 0. 3 1. 4 2.

2.1 

1 Existe por la derecha y es 1. 2 No existe. 3 4. 4 3. 5 Existe por la izquierda y es -3 . 6 Existe por la derecha y es 4.

2.1 

1 Existe y es 0. 2 Existe por la derecha y es -1 . 3 No existe. 4 3. 5 Existe y es 0. 6 Existe y es 1.5.

2.1 

1 Existe por la derecha y es -3 . 2 Existe y es 1. 3 Existe y es -2 . 4 No existe. 5 Existe y es 0. 6 Existe y es 3.

3.1 

1 Para todo $x \neq 3$ (y $x \neq -3$, donde ninguna de las dos expresiones está definida), pues $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)}$ y el factor $x-3$ solo se puede cancelar si $x \neq 3$. 2 Porque el límite cuando $x \rightarrow 3$ solo depende de los valores de la función para $x \neq 3$, y ahí las dos expresiones coinciden (lo que ocurra o no en $x = 3$ es irrelevante). 3 Sí. El límite en $x = 3$ no depende del valor $f(3)$; por ejemplo, $f(x) = 7$ si $x \neq 3$ y $f(3) = 5$ cumple ambas condiciones (esa f simplemente no es continua en 3). 4 Para todo $a \in \mathbb{R} - \{-1, -3\}$. (En $a = -3$ el límite es infinito; en $a = -1$ los laterales son $\frac{3}{2}$ y -1 . En $a = -2$ sí existe y vale 4, aunque $-2 \notin D_g$, y en $a = 1$ ambos laterales valen 1.) 5 Por ejemplo, con $a = 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$ y $g(x) = -\frac{|x|}{x}$: ninguno de los dos límites existe (los laterales son 1 y -1), pero $f(x) + g(x) = 0$ para todo $x \neq 0$, de modo que $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$. 6 a) Para $x > 1$, $|x-1| = x-1$ y entonces $f(x) = 1$ y $g(x) = 1$; para $x < 1$, $|x-1| = -(x-1)$ y entonces $f(x) = -1$ y $g(x) = -1$. Como los límites laterales son 1 y -1 , ninguno de los dos límites existe. b) Para todo $x \neq 1$, $f(x) \cdot g(x) = \frac{(x-1)}{|x-1|} \cdot \frac{|x-1|}{(x-1)} = 1$, así que $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)] = 1$. 7 $a = 15$. (Con $a = 15$ el numerador es $3(x+2)(x+3)$ y el límite vale -1 .) 8 Multiplique por el conjugado $\sqrt{ax+b} + 2$ arriba y abajo de la fracción. Los valores requeridos son $a = b = 4$. 9 $\frac{3}{4}$.

3.2 

1 -4 . 2 -4 . 3 -1 . 4 No existe. 5 6. 6 5. 7 6. 8 No existe. 9 2.

10 

2.

11 

2.

12  2.

5.1 
 1 $\frac{1}{2}$. 2 0. 3 $\frac{5}{4}$. 4 $\frac{a+1}{2a-1}$, con $a \neq \frac{1}{2}$. 5 0, si $a \neq 0$. 6 $-\frac{1}{8}$. 7 -20. 8 $-\frac{1}{3}$. 9 1.

10  $\frac{4}{3}$.

11  $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

12  -1.

13  $\frac{3}{2}$.

14  $-\frac{3}{4}$.

15  $\frac{5}{12}$.

16  $-\frac{1}{320}$.

17  $\frac{1}{32}$.

18  $-\infty$ izq, ∞ derecha.

19  $\frac{1}{8}$.

20  ∞ izquierda, $-\infty$ derecha.

21  $-\frac{3}{4}$.

22  $2 \cdot 1^{-1}$.

23  $-\frac{1}{2}$.

24  $\frac{c}{3}$.

25  ∞ .

26  ∞ .

27  $\frac{4}{5}$.

28  0.

29  $\mathbb{A}$.

30  ∞ .

31  $-\infty$.

32  ∞ izq, $-\infty$ derecha.

33  ∞ .

34  0

35  $\frac{1}{2}$.

36  $-\frac{5}{2}$.

37  0.

5.2  $k = \frac{1}{2}$.

6.1 
1

1. 1.
2. No existe.
3. 2.
4. 1; 1.
5. ∞ .

6.1 
2

1. ∞ .
2. No existe.
3. No existe.
4. 3.
5. 3.

6.1 
3

1. -1.
2. 0.
3. 2.
4. 1.
5. 0.
6. No existe.
7. 0.

6.1 
4

1. 2.

2. No existe.

3. -2 .

4. No existe.

5. $2, 5$.

6. 2 .

6.1  
5

1. $-\infty$.

2. 1 .

3. No existe.

4. No existe.

5. -2 .

6. ∞ .

7. ∞ .

6.1  
6

1. 1 .

2. ∞ .

3. 2 .

4. 1 .

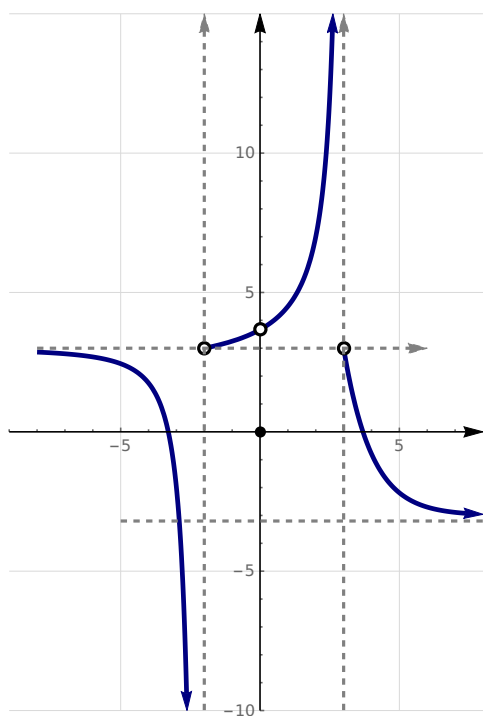
5. ∞ .

6. $-\infty$.

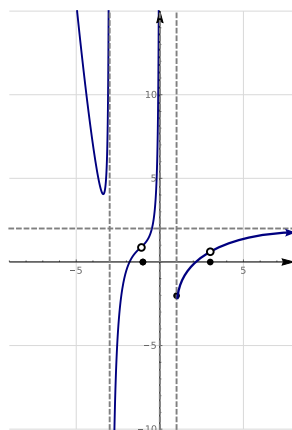
7. 1 .

8. 1 .

6.2  



1



2

3 Un bosquejo posible: la gráfica arranca en $(-3, -1)$ (punto lleno, por g.) pero con $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 1$, de modo que hay un salto en el extremo; entre -3 y -1 la curva llega a -1 con un valor lateral distinto de 2 (así $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ no existe); en $[-1, 1]$ es el segmento horizontal $y = 2$; a la derecha de 1 baja hacia la asíntota horizontal $y = -1$ sin cortar el eje X (c.), lo que obliga a un salto; en $x = 3$ hay una discontinuidad evitable: el hueco está en $(3, 1)$ y el punto lleno en $(3, -1)$. 4 Un bosquejo posible: la gráfica solo existe a la derecha de -3 ; en $x = -2$ hay un salto (llega a 4 por la izquierda y sale de 5 por la derecha, ambos huecos); al acercarse a 2 por la izquierda baja indefinidamente (asíntota vertical); y en $x = 3$ hay un hueco en $(3, 0)$, pues el límite vale 0 pero $3 \notin D_h$.

8.1

1 -4 . 2 $-\frac{1}{4}$. 3 $\frac{3}{2}$. 4 2 . 5 $\frac{1}{2}$. 6 $\frac{\sqrt{2}}{8}$. 7 $\frac{3}{4}$. 8 $\frac{1}{2}$. 9 2 .

10 $\frac{3}{8}$.

11 ∞ .

12 $-\frac{1}{4}$.

13 ∞ .

14 1 .

15 $\frac{-3\sqrt{3}}{8\pi} \approx -0,206748$.

16 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

17 2 .

18 5 .

19 $\frac{45}{2}$.

20 ∞ .

21  $\frac{-2}{\pi} \approx -0,636620.$

22  0.

23  0.

24  $\frac{1}{6}.$

25  $\frac{3}{2} + \sqrt{3} \approx 3,23205.$

26  ∞ izquierda, $-\infty$ derecha.

27  0.

28  $\cos a.$

29  $-\sin a.$

10.1 

1 0. 2 0. 3 0. 4 $+\infty.$ 5 $-\frac{x}{9}.$ 6 $-\frac{9}{2}.$

12.1 

1 $-\frac{3}{2}.$ 2 -7. 3 3. 4 $-\frac{1}{4}.$ 5 1. 6 0.

14.1 

1 $+\infty.$ 2 $-\ln 4.$ 3 1. 4 1. 5 0. 6 1.

Soluciones del Capítulo 3

2.1  No, los límites laterales son distintos: $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = -13$ y $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = g(-1) = -12.$

2.2 

1 Falso. Por ejemplo, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ no está definida en $x = 1$ y sin embargo $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$ 2 Verdadero. Escribiendo

$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g(x)$ y aplicando el límite de un producto, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \cdot 0 = 0.$ 3 Verdadero. Si $a \neq -1$ los límites laterales son $-(a+1)$ y $a+1$, distintos entre sí; si $a = -1$ la expresión vale 0 para todo $x \neq 3$ y el límite es 0. 4 Falso. Por ser g continua en $x = 2$ se tiene, por definición, $g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 5.$ 5 i.) Verdadero: ambos límites laterales valen $\frac{1}{2}.$ ii.) Falso: f no está definida en $x = -4.$

4.1 

1 $\mathbb{R} - \{1\}$ 2 $\mathbb{R} - \{-1, 2, 3, 4\}$

4.2 

1 $a = -1, b = 1$ 2 $a = 1, b = 2$

4.3 

a. $(a = 2 \text{ y } b = 1)$ ó $(a = -2 \text{ y } b = -1)$

b. $a = 2 \text{ y } b = 1.$

4.4  No existe tal k : el empalme en $x = k$ exigiría $k^2 + 5 = k^2 + 9$, es decir $5 = 9$.

4.5 

1 No en 1. 2 No en 1. 3 No en 1. 4 No en 0

4.6 

1 $a = \frac{1}{2}$, $c = \frac{-1}{4}$ 2 No es posible. 3 $a = \frac{-3}{2}$, $c = \frac{3}{2}$

6.1 

$a = 0$, $b = 2$ y $c = \frac{-1}{15}$.

6.2 

$a = 1$ y $b = 6$

8.1 

f no es continua en -1 y $m = \frac{3}{2}$.

Soluciones del Capítulo 4

2.1 

1 -15 . 2 -11 . 3 $\frac{1}{4}$. 4 $\frac{4}{\sqrt{3}}$. 5 0 . 6 $\frac{(1+3\sqrt{3})}{2}$. 7 $g'(x) = 2cx + b$. 8 $h'(x) = \frac{1}{2(x+1)^{3/2}}$. 9 $g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

10 

$h'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

4.1 

1 $f'(x) = 16x^7 - 15x^4$. 2 $f'(x) = 4x^{1/3} - 4x^{-1/3}$. 3 $g'(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} + \frac{1}{2z\sqrt{z}}$. 4 $h'(z) = 3 - z^{-2} + 4z^{-3} - z^{-4/3}$. 5 $f'(s) = 4s^3 + 3s^2 + 6s + 2$. 6 $f'(v) = 3v^2 - 6v + 2$. 7 $f'(y) = 2 + 3y^{-2}$. 8 $f'(t) = 20t^{3/2} - \frac{1}{5}$. 9 $f'(x) = \frac{(ad-bc)}{(cx+d)^2}$.

10 

$f'(t) = 2t + \left(\frac{1}{3-t}\right)^2$.

11 

$f'(r) = \frac{(1+r)\cos r - \sin r}{(1+r)^2} + \frac{(1-r)\sin r - \cos r}{(1-r)^2}$.

12 

$f'(u) = \frac{2u^2 + 8u - 1}{(u+2)^2}$.

13 

$f'(p) = -24p^3 - 3p^2 - 8p - 1$.

14 

$f'(x) = \frac{10-2x}{(x+1)^3}$.

15 

$f'(t) = \frac{-4t^2 + 6t - 1}{(1-t)^2(t-2)^2}$.

16 

$f'(u) = \frac{u^4 + 8u^3 - 13u^2 - 14u - 18}{(u-1)^2(5+u)^2}$.

17 

$f'(r) = \frac{64r^2 + 48r - 12}{r^2(1-2r)^2}$.

18 

$g'(x) = -4x^{-3} \arctan x + \frac{2x^{-2}}{x^2 + 1}$.

$$19 \quad g'(x) = \frac{\arccos x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$20 \quad h'(x) = \frac{1}{1 + \cos x}.$$

$$21 \quad f'(u) = \frac{2}{u(1 - \ln u)^2}.$$

$$22 \quad f'(u) = \frac{1 + \ln u + e^u(u \ln u - \ln u - 1)}{(1 - e^u)^2}.$$

$$23 \quad f'(z) = z^{-2/3} \left(1 + \frac{\ln z}{3} \right).$$

$$24 \quad g'(t) = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}.$$

$$25 \quad g'(t) = \frac{1+t-t \ln t}{t(t+1)^2}.$$

$$26 \quad h'(x) = \cos x + \sin x.$$

$$27 \quad h'(z) = \frac{e^z \left(\sqrt{1-z^2} \arccos z + 1 \right)}{\sqrt{1-z^2} (\arccos z)^2}.$$

$$28 \quad h'(z) = \frac{-1}{\sqrt{z}(1+z^2)} - \frac{\operatorname{arccot} z}{2z\sqrt{z}}.$$

$$6.1$$

$$1 \quad f'(y) = 24 \left[(y^2 + 3)^4 - 1 \right]^2 \cdot (y^2 + 3)^3 \cdot y. \quad 2 \quad f'(\theta) = 5 \sec(5\theta) + 10 \sin^2(5\theta) \sec^3(5\theta). \quad 3 \quad f'(x) = 27(x-7)^2/(x+2)^4.$$

$$4 \quad f'(t) = \frac{18t^5 - 105t^4}{2(t^2 - 5t)^{3/2}}. \quad 5 \quad f'(x) = \frac{3 \tan^2(x) \sec^2(x) (\sin(x)+2) - \cos(x) (\tan^3(x)-1)}{(\sin(x)+2)^2}$$

$$6 \quad f'(x) = (4x-5)e^{2x^2-5x+3}. \quad 7 \quad f'(q) = 5(q-3e^{\frac{q}{3}})^4(1-e^{\frac{q}{3}}). \quad 8 \quad f'(x) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}. \quad 9 \quad f'(t) = t^{-1} + t(t^2+1)^{-1}.$$

$$10 \quad f'(p) = 3p^2(p^3-1)^{-1} - 2p + 5(2-10p)^{-1}.$$

$$11 \quad f'(z) = \frac{1}{2}z^{-1}(1+\ln z)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}(1+\sqrt{z})^{-1}.$$

$$12 \quad f'(x) = 3e^{3x}g(\ln^2 x) + 2e^{3x}g'(\ln^2 x) \frac{\ln x}{x}.$$

$$13 \quad f'(y) = \frac{2 \ln(2y+6)}{(y+3)}.$$

$$14 \quad f'(z) = \frac{2 \ln(\ln(2z^3-8z))(6z^2-8)}{[(2z^3-8z) \ln(2z^3-8z)]}.$$

$$15 \quad f'(x) = \frac{\sin(2x)(e^x + \sec^2(x+1)) - 2 \cos(2x)(e^x + \tan(x+1))}{\sin^2(2x)}$$

$$16 \quad f'(w) = \frac{1}{2(w-1)} - \frac{3}{w} + \frac{\sin(w^2) \cdot 2w}{\cos(w^2)}.$$

$$17 \quad h'(z) = 2 \arccos\left(\frac{e^{-z}}{z}\right) \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{e^{-z}}{z}\right)^2}} \cdot \frac{-ze^{-z} - e^{-z}}{z^2}$$

$$18 \quad f'(x) = \frac{3 \arctan^2(\ln(x^2 + e^x)) \cdot (2x + e^x)}{(x^2 + e^x) \cdot (1 + \ln^2(x^2 + e^x))}.$$

$$19 \quad h'(x) = \frac{3 \ln 3 \cdot 3^{g(x^3+4)} \cdot g'(x^3+4) \cdot x^2}{3^{g(x^3+4)} + 1}.$$

$$20 \quad f'(x) = \frac{\sqrt{1-2x^2}(x+3)}{(4x-1)^2} \left(\frac{-2x}{1-2x^2} + \frac{1}{x+3} - \frac{8}{4x-1} \right).$$

$$21 \quad f'(v) = \sqrt{\frac{(v-1)^3}{(2v+7)(5-v)^2}} \left(\frac{3}{2v-2} - \frac{1}{2v+7} + \frac{1}{5-v} \right)$$

$$22 \quad f'(t) = 2t^{\ln t - 1} \ln t.$$

$$23 \quad f'(w) = e^w w^{1-w} (w^{-1} - \ln w).$$

$$24 \quad g'(z) = -2e^{1-2z} \sec(e^{1-2z}) \tan(e^{1-2z}).$$

$$25 \quad h'(u) = e^{u \sin u} (\sin u + u \cos u) - \frac{12u \ln^2(3-2u^2)}{3-2u^2}.$$

$$26 \quad h'(u) = -12ku^2 \cos^3(\sin(ku^3)) \sin(\sin(ku^3)) \cos(ku^3).$$

$$27 \quad g'(u) = 2 \cot u \ln(\sin u) - \frac{2e^{2u}}{1-e^{2u}}.$$

$$28 \quad g'(u) = 3u^2 \sec(u^3).$$

$$6.2 \quad 1 \quad y' = \frac{f'(\ln z) - (1+z)f(\ln z)}{z^2 e^z}. \quad 2 \quad y' = e^{f(u)} [f(e^{-u})f'(u) - e^{-u}f'(e^{-u})]. \quad 3 \quad y' = 2nw^{2n-1}f'(w^{2n}) - n[f(w)]^{n-1}f'(w). \quad 4 \quad y' = e^{4w} \left[4f(\ln^3 w) + \frac{3 \ln^2 w}{w} f'(\ln^3 w) \right].$$

$$8.1$$

$$1 \quad (f \cdot g)'(2) = 5. \quad 2 \quad h'(-1) = -6. \quad 3 \quad (f/g)'(5) = 8. \quad 4 \quad q'(4) = \frac{3}{16}. \quad 5$$

$$a) \quad (f+g)'(5) = -1.$$

$$b) \quad (f \cdot g)'(5) = 8.$$

$$c) \quad (f/g)'(5) = -8.$$

$$d) \quad (g/f)'(5) = 2.$$

$$e) \quad \left(\frac{f}{f-g} \right)'(5) = 8.$$

$$6 \quad (p \circ q)'(6) = -4. \quad 7 \quad h'(2) = -\frac{1}{4}. \quad 8 \quad h'(0) = -\frac{3}{2}. \quad 9 \quad g'(0) = -3.$$

$$10 \quad H'(3) = 28.$$

$$11 \quad H'(3) = \frac{e-12}{e}.$$

$$12$$

$$a) F'(0) = -a.$$

$$b) H'(0) = 3 \ln 2.$$

$$13$$

$$a) f'(3) = \frac{-1}{6}.$$

$$b) g'(4) = \frac{21}{2}.$$

$$14 \quad (f \cdot g)'(5) = 8 \quad y \quad \left(\frac{f}{f-g} \right)'(5) = 8.$$

$$15 \quad f'(1) = \frac{3}{2}.$$

$$16 \quad f'(3) = \frac{-1}{6}.$$

$$10.1$$

$$1 \quad \text{Por definición, } g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)f(x+h) - xf(x)}{h} = f(x) + xf'(x). \quad 2 \quad g'(x) =$$

$$3 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)][f(x+h) + f(x)]}{h} = 6f(x)f'(x). \quad 3 \quad a = 2 \text{ y } f(x) = x^6. \quad 4 \quad f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ y } f'(x) = x^2 + 1$$

. 5 Como $y' = h + xh' = (1 - x^2)h$, se obtiene $xy' = x(1 - x^2)h = (1 - x^2)y$. 6 $y' = -(1 + 1/x)y^2$; por tanto, $xy' = -(x + 1)y^2$. Además, $yg - 1 = -y(x + 1)$, de modo que $xy' = y(yg - 1)$. 7 La derivada del primer término es $1/(1 + x^2)$, igual a la derivada de $\arctan x$; por ello, $f'(x) = 0$ donde f está definida. 8

$$a) \text{ Al derivar } f'(x) = f(1/x), f''(x) = -f'(1/x)/x^2 = -f(x)/x^2.$$

$$b) a = c, \quad b = 0.$$

$$9 \quad \frac{d}{dx} f(u) = f'(u)u' = e^{-2 \ln(x^2)} \frac{2}{x} = \frac{2}{x^5}, \text{ para } x \neq 0.$$

$$10 \quad f'(x) = \frac{x^2}{8}.$$

$$12.1$$

$$1 \quad \frac{1}{3}. \quad 2 \quad -1. \quad 3 \quad z' = \frac{1}{2z(w+z)-1}. \quad 4 \quad x' = \frac{-x}{[\ln(2x+y)(2x+y)+2x]}.$$

$$12.2 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-2} \text{ y } \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2y}{(y-2)^3}.$$

$$12.3$$

$$1 \quad y' = \frac{2y^2 e^{2x} - 3x^2 y - y \ln^2 y}{2x \ln y - y \cos y - y e^{2x}}.$$

$$2 \quad y' = \frac{\sin x - y^2 - 1}{2xy - e^y}.$$

$$3 \quad y' = \frac{y e^{xy} + 1}{1 + 3y^2 - x e^{xy}}.$$

14.1

1 $f'(x) = \left(2x \ln(x+1) + \frac{x^2}{x+1}\right) (x+1)^{x^2}$

2 $g'(x) = \frac{2^{x-1}x^x (\ln(2x) + 1)}{\sqrt{(2x)^x}}$ 3 $h'(x) = \left(3 \ln(x^3 + x) + \frac{(3x^2+1)(3x-2)}{x^3+x}\right) (x^3 + x)^{3x-2}$

14.2

1 $y' = \frac{(x+3)[\sin(x) \cdot (x+3) - \cos(x) \cdot (x+1)]}{e^x \cos^2(x)}$

2 $h'(x) = \frac{(-39x^3+14x^2-51x+6)\sqrt{x^2+1}}{4\sqrt[4]{x}(x^2+1)(3x+2)^6}$

3 $f'(x) = -\frac{x(5x^6 - 45x^3 + 4)}{(5x^3 + 1)^3}$

16.1

1 $z''' = -64e^{1-4q}$. 2 $x'' = 16(1+2s)^{-3}$. 3 $y'' = 10$. 4 $y''' = -12(x+1)^{-4}$. 5 $y'' = \frac{2y}{(2-y^2)^3}$. 6 $y'' = \frac{9}{y(1-\ln y)^3}$.

18.1

1 $f'(x) = (13-6x)e^{-2x}$ y $f''(x) = (12x-32)e^{-2x}$. Al sustituir, $f'' + 4f' + 4f = 0$. 2 $A = B = \frac{-1}{2}$ y $C = \frac{-3}{4}$.

18.2

1 Como $F' = f'g + fg'$, al derivar otra vez resulta $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$. 2 $F''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$. $F^{(4)} = f^{(4)}g + 4f'''g' + 6f''g'' + 4f'g''' + fg^{(4)}$.

18.3

$y' = (2x+3)e^{2x}$ y $y'' = (4x+8)e^{2x}$; al sustituir se obtiene 0.

18.4

$y' = \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x - 10e^{-x}$; por tanto, $y' + y = \sin x$.

18.5

$g' = \frac{\pi x \cos(\pi x) - \sin(\pi x)}{x^2}$ y $g'' = -\frac{\pi^2 \sin(\pi x)}{x} - \frac{2\pi \cos(\pi x)}{x^2} + \frac{2 \sin(\pi x)}{x^3}$. Al sustituir se obtiene $-\pi^2 g(x)$.

18.6

$y' = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$ y $y'' = \frac{4(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$. Sustituyendo estas expresiones, ambos lados son $\frac{16x(1-3x^2)}{(x^2+1)^2}$.

18.7

$Q(2) = 6$.

Soluciones del Capítulo 5

2.1

1 1.1 m/s. 2 -8.7 m/s. 3 -3.849 m/s. 4 -3.8 m/s. 5 -28.6356 m/s.

2.2

1 -34.3 m/s. 2 -29.89 m/s. 3 -29.4049 m/s. 4 -29.4 m/s. 5 -54.2218 m/s.

2.3

$h_0 = 11.4796$ m.

2.4

1 $(18-4t)$ m/s. 2 4.5s. 3 4s. 4 Sí, porque tarda menos en chocar que en detenerse.

2.5

$v_m = 7$.

4.1

Recta tangente: $y = -4x + 5$. Recta normal: $4y = x - 14$.

4.2  $f(x) = 2x^2 - x.$

4.3  Parábola: $f(x) = \frac{-x^2}{2}.$ Recta tangente: $2x + y = 2.$

4.4  La recta $y = -x$ es tangente a la curva únicamente en $P(3, -3)$, y la recta normal en P es $y = x - 6.$ En $Q(1, 3)$ se tiene $f'(1) = -1$, de modo que la recta tangente en Q es *paralela* a $y = -x$: es $y = -x + 4$, y la normal en Q es $y = x + 2.$

4.5  Recta normal: $y = x - 3e^{-2}.$ Recta tangente horizontal en: $P(e^{-1}, -e^{-1}).$

4.6  $w - 1 = -(u + 2).$

4.7  $1 \quad y - \frac{1}{4} = -\frac{1}{48}(x - 8). \quad 2 \quad y - 1 = -2(x - \frac{\pi}{2}).$

4.8  $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{2}\right).$

4.9  $(2, 4).$

4.10  $(-1, e^{-1}).$

4.11  $y - 3 = \frac{1}{5}(x + 1).$

4.12  $y + 2 = \frac{9}{4}(x - 3).$

4.13  La recta tangente es perpendicular a la recta $y = -\frac{x}{9}$ en $(-2, 3)$ y $(2, 7).$ Posee rectas tangentes horizontales en $(1, 3)$ y $(-1, 7).$

4.14  5.

4.15  236.

4.16  $y = x + 3 \ln 3.$

La segunda recta tangente: $y = x + \frac{35}{4} - \ln 8.$

4.17  $y = -\frac{x}{4} + \frac{5}{16}.$

4.18  $y = 3$ y $y = \frac{2}{3}x - 5.$

4.19  $f'(x) = 2x$ si $x > -1$ y $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ si $x < -1.$ En $x = -1$ no hay derivada, pues $f'_-(-1) = -1 \neq f'_+(-1) = -2$ (aunque f sí es continua ahí), de modo que no existe recta tangente en ese punto.

6.1  $-\frac{1}{6}.$

1 $-\frac{1}{6}.$

2 $-\sqrt{2}.$

3 1.

4 0.

5 -1.

6 $e^3.$

7 1.

8 1.

9 e^{rt} .

10  $\frac{1}{4}$.

11  $\frac{1}{2}$.

12  1.

13  1.

14  e^{-1} .

15  0.

16  $\frac{1}{2}$.

17  1.

18  $\frac{1}{2}$.

19  0.

20  e^{-2} .

21  $+\infty$.

22  -2 .

23  $\frac{k+n}{n}$.

24  e .

25  $\frac{-1}{4}$.

26  $-\pi$.

27 

a) Si $n = 1$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - (1+x)}{x^n} = 0$.

b) Si $n = 2$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - (1+x)}{x^n} = \frac{1}{2}$.

c) Si $n \geq 3$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - (1+x)}{x^n} = +\infty$.

8.1

1 El primer paso es válido (forma $\frac{0}{0}$), pero el segundo no: $\frac{\cos x}{2x}$ ya **no** es indeterminado, es de la forma $\frac{1}{0}$, y ahí no se puede aplicar la regla. De hecho el límite no existe: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2x} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos x}{2x} = -\infty$. 2 Al escribir $x \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\cos(1/x)}{1/x}$ se obtiene la forma $\frac{1}{0^+}$, que **no** es indeterminada, así que no procede aplicar la regla de L'Hôpital. El límite correcto es $+\infty$, pues $\cos\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 1$ y $x \rightarrow +\infty$.

8.2

$$a + b + c + d = 24.$$

8.3

$$a = \frac{4}{3} \text{ y } b = -2.$$

8.4

$$a = \frac{1}{2}.$$

8.5

Para $x \neq 0$, $|x|^x = e^{x \ln|x|}$ y $x \ln|x| \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow 0$; luego $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^x = e^0 = 1 = f(0)$ y f es continua en $x = 0$.

34

1 Sea θ el ángulo entre la pared vertical y la escalera. Como la escalera mide 4 m,

$$\sin \theta = \frac{x}{4}.$$

Derivando respecto al tiempo t ,

$$\cos \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4} \frac{dx}{dt}.$$

El extremo inferior se aleja de la pared a 25 cm/s, es decir,

$$\frac{dx}{dt} = 0.25 \text{ m/s}.$$

Cuando el extremo superior está a 2 m del suelo, $y = 2$

Como

$$\cos \theta = \frac{y}{4},$$

se tiene

$$\cos \theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo,

$$\frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4} (0.25).$$

Por tanto,

$$\frac{1}{2} \frac{d\theta}{dt} = 0.0625,$$

y entonces

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.125.$$

Por lo tanto, el ángulo aumenta a razón de

$$\frac{1}{8} \text{ rad/s}$$

o equivalentemente,

$$0.125 \text{ rad/s}.$$

10.1

- 1 Se acerca a 0,480740 m/s.
- 2 Crece 18849,6 cm²/s.
- 3 Disminuye 0,00530516 cm/min.
- 4 Entran 9,29204 m³/s (= 9292,04 L/s).
- 5 Aumenta 0,0208 $\bar{3}$ cm/s.
- 6 Sube 6,25 cm/min.
- 7 615,752 km/h.
- 8 0,0796 dm/s, aproximadamente.
- 9

1. -3,65 m/s.
2. -5,613 m²/s.
3. -0,9869 rad/s.

10   Se acercan a una velocidad de 25 m/min.

11   4,2 m/s.

12   -66,67 m/s.

13   0,8418 cm/s, aproximadamente.

14   Disminuye a razón de 1,22 m/s.

15   Aumenta a razón de 0,28 m/min.

16  

1. Disminuye a razón de 750 km/h.
2. 20 min.

17   Aumenta a razón de 3,44 unid²/s.

12.1   $a = -2$ y $b = 4$. Es valor mínimo.

12.2   $a = \frac{2}{3}$ y $b = -1$.

12.3   $f(x) = \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{-4}{3}x + \frac{7}{9}$.

12.4

1 F. Contraejemplo: $f(x) = x^3$ cumple $f'(0) = 0$ y es creciente, así que en $x = 0$ no hay extremo. 2 F. Falta la hipótesis de derivabilidad: $f(x) = |x|$ es continua, $f(-1) = f(1)$ y f' nunca se anula. 3 V. Es exactamente el teorema de Rolle. 4 F. Que f'' se anule no basta: hace falta *cambio de signo* de f'' . Para $f(x) = (x-2)^4$ se tiene $f''(2) = 0$ y no hay inflexión. 5 F. Puede ser ambas cosas: $f(x) = x^4$ si $x < 0$ y $f(x) = \sqrt{x}$ si $x \geq 0$ tiene un mínimo en $(0, 0)$ y allí cambia la concavidad. 6 V. Por ejemplo $f(x) = e^{-x}$. 7 V. Si $f' < 0$ en todo $\mathbb{R}$, f es decreciente y debería cumplirse $f(3) < f(1)$; pero $0 > -2$. Contradicción.

12.5

1 $c \in (-\infty, -\frac{1}{3} \cup]\frac{1}{3}, +\infty[)$ 2 Para ningún valor de c . Como P'' es un polinomio de grado 2, o tiene dos raíces simples (dos cambios de signo) o ninguna, o bien una raíz doble, en la que P'' no cambia de signo. 3 $c \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

12.6

1 $x = \frac{1}{2}$, $x = 0$, $x = 1$. 2 $x = -\frac{1}{2}$.

12.7

1 Máx en $(-3, 297)$; mín en $(0, 0)$.
 2 Máx en $(2, 1)$; mín en $(-2, -\frac{1}{3})$.
 3 Máx en $(1, -2)$; mín en $(e, -e)$.
 4 Máx en $(-\frac{\pi}{2}, 1)$, $(0, 1)$ y $(\frac{\pi}{2}, 1)$; mín en $(-\frac{\pi}{4}, -1)$ y $(\frac{\pi}{4}, -1)$.

12.8

1 Crece en $] -\infty, -2[$ y en $[0, \infty[$; decrece en $[-2, 0]$; máx en $(-2, 3\sqrt[3]{4})$; mín en $(0, 0)$.
 2 Crece en $[-2, 0]$; decrece en $] -\infty, -2[$ y en $[0, \infty[$; máx en $(0, 1)$; mín en $(-2, -\frac{1}{3})$.
 3 Máx en $(0, -2)$; mín en $(2, 2)$.
 4 Máx en $(0, e^4)$; mín en $(-2, 5)$ y en $(2, 5)$.
 5 Mín en $(0, \ln 5)$.

12.9

$k = 0$. Se trata de un mínimo, en $(2, \frac{e^2}{4})$.

12.10

$a = -3$, $b = 3$, $c = 0$.

14.1

1 $z = -\frac{3}{2}$, $y = \frac{-1}{2}$.
 2 $x = 3$, $y = 1$.
 3 $w = 0$, $y = -1$ en $-\infty$, $y = 1$ en ∞ .
 4 $u = -2$, $y = 2u - 4$.
 5 $x = 0$, $y = -1$ en $-\infty$, $y = x$ en ∞ .

14.2

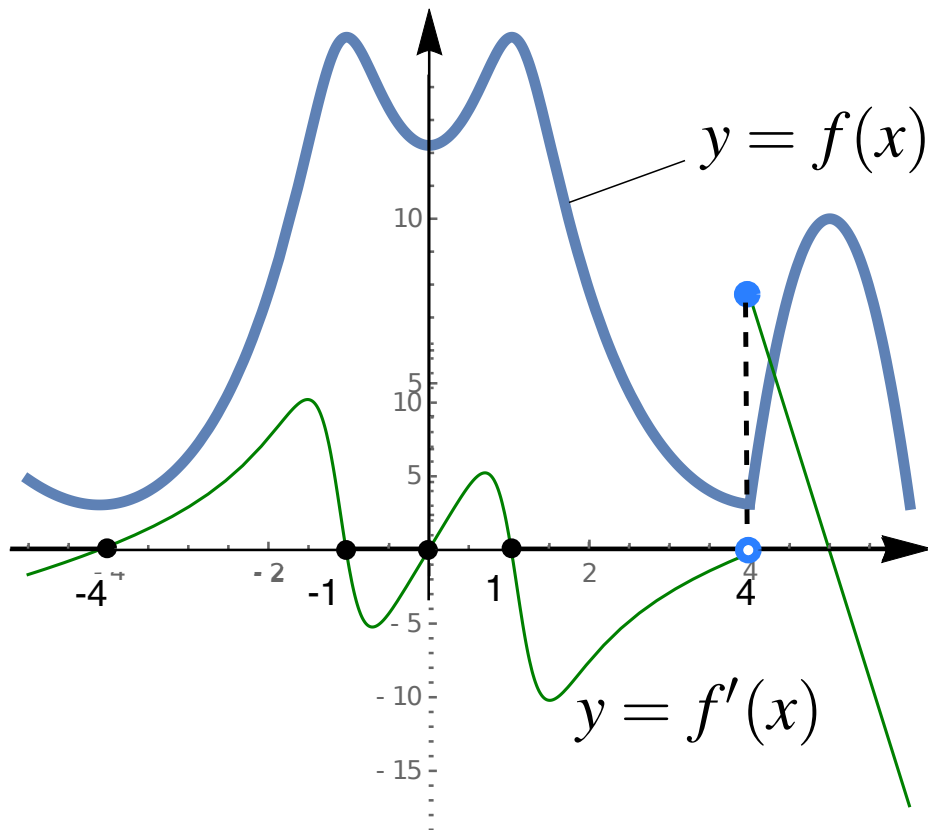
1 f crece en los intervalos: $]2, 4[$ y $]6, +\infty[$ pues es donde $f'(x) > 0$.
 2 Sólo en $x = 4$; pues $f'(x) = 0$. Alrededor de este punto f' cambia de signo.
 3 En $x = 2$ y $x = 6$; pues $f'(x) = 0$. Alrededor de estos puntos, f' cambia de signo.
 4 f es cóncava hacia arriba en los intervalos $]1, 3[$, $]5, 7[$ y $]8, +\infty[$; pues f' crece.
 5 En $x = 1$; $x = 3$; $x = 5$; $x = 7$ y $x = 8$; pues f' alcanza máx. o mín. relativos, o bien f' no existe y hay cambio de monotonía de f' .

14.3

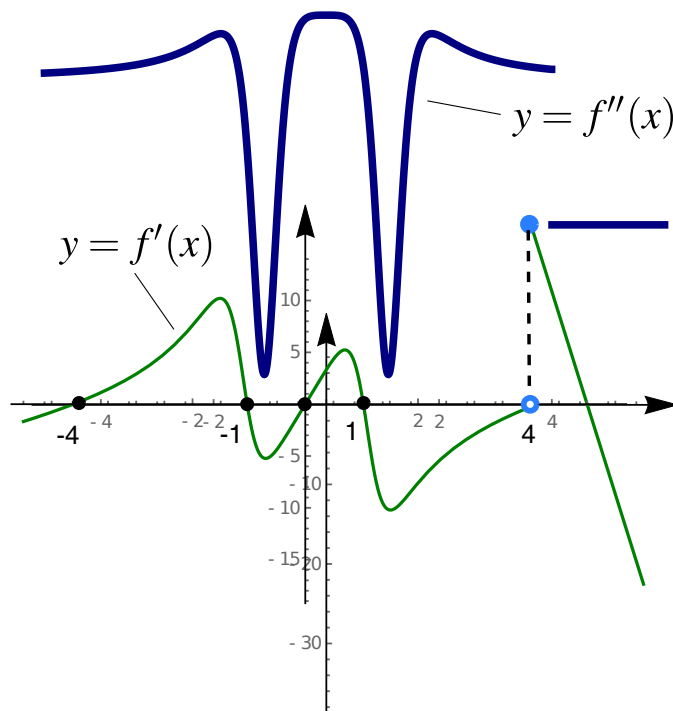
1 La gráfica de f decrece en los intervalos: $] -\infty, -4.5[$, $] -3.5, -2.5[$, $] -2, 0[$ y $]1, +\infty[$, pues es donde $f'(x)$ es negativa.
 2 En $x = -3$, 5 , $x = -2$ y $x = 1$, pues es donde $f'(x)$ es cero y, alrededor de estos puntos, hay cambio de signo de f' de positivo a negativo (recuerde que f es continua y el máximo puede ser "un pico"). En $x = -2$ y en $x = 1$ no podría ser un máximo local.
 3 En $x = -4.5$, $x = -2.5$ y $x = 0$; pues es donde $f'(x)$ es cero y, alrededor de estos puntos, hay cambio de signo de f' de negativo a positivo.
 4 f es cóncava hacia abajo en los intervalos $] -4, -3[$ y $]1, +\infty[$, pues f' es decreciente y por lo tanto $f''(x)$ es negativa.

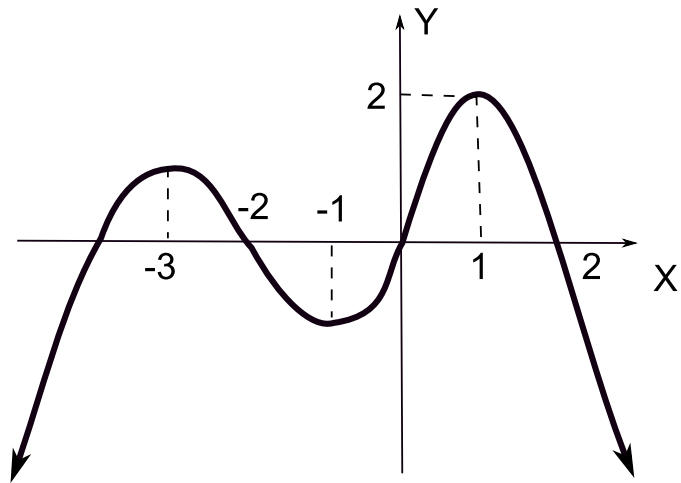
5 En: $x = -4$, $x = -3$ y $x = 1$, pues es donde f' alcanza máximos o mínimos, o bien, f' no existe y hay cambio de monotonía de f' .

6

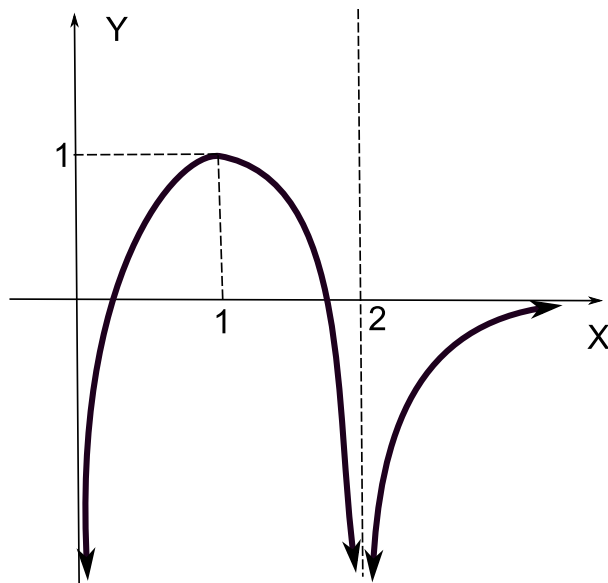


7

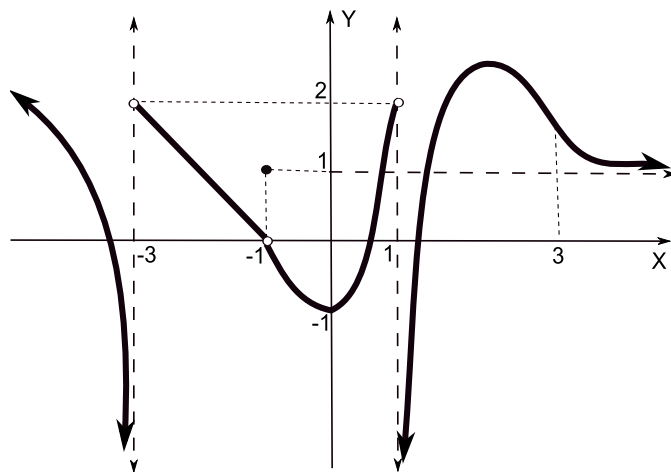




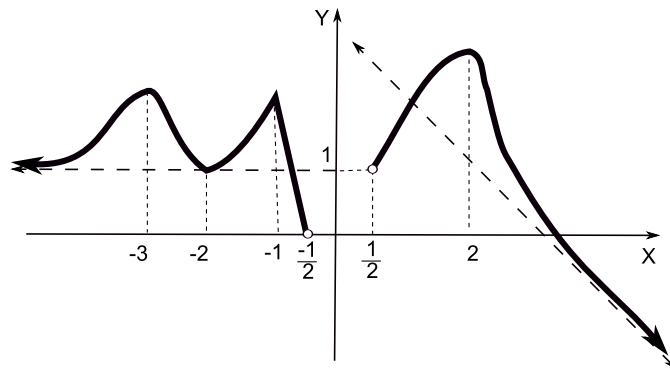
2



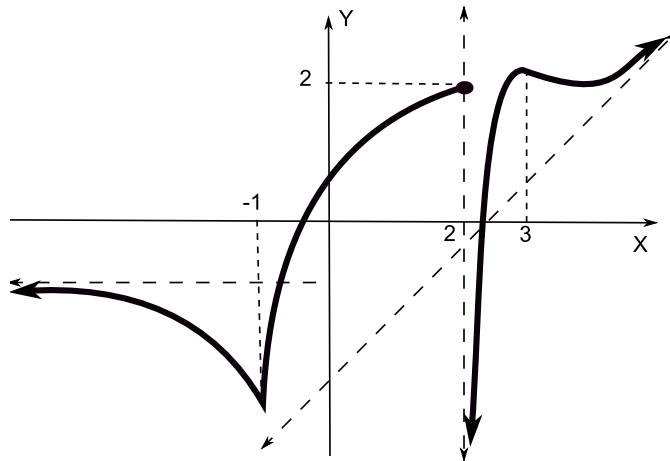
3



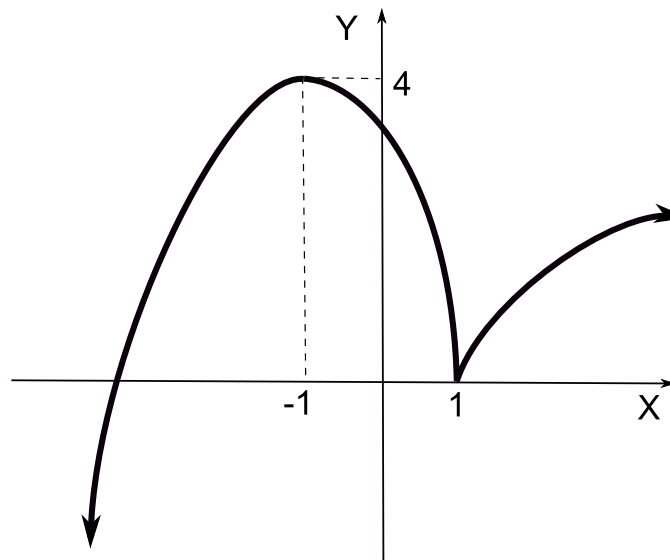
4

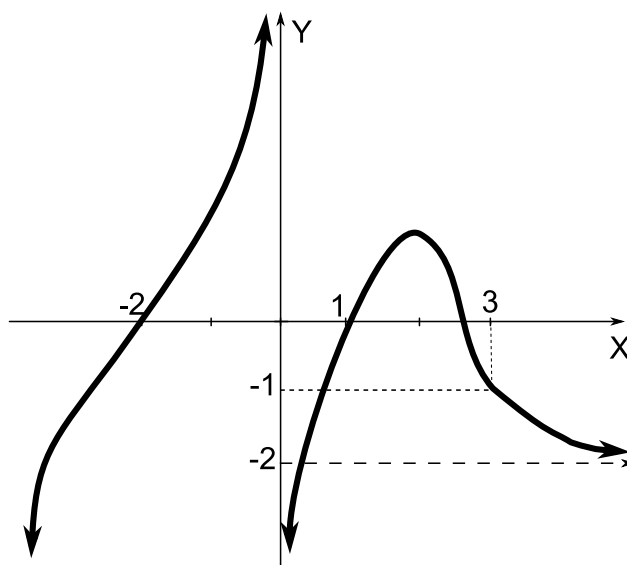


5



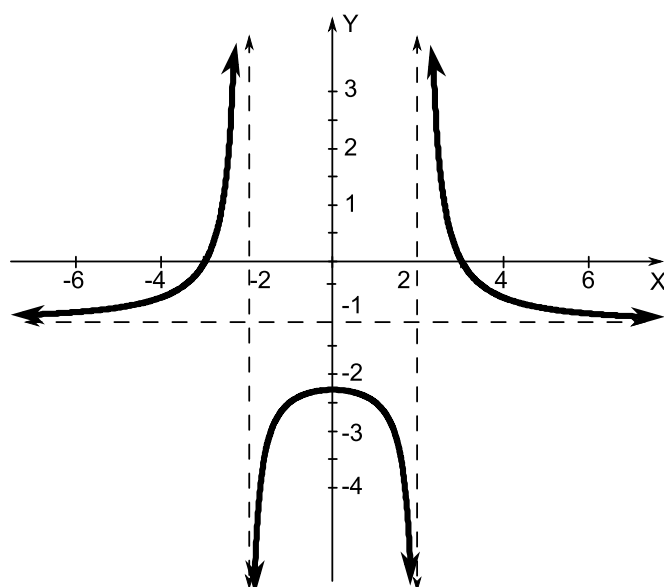
6



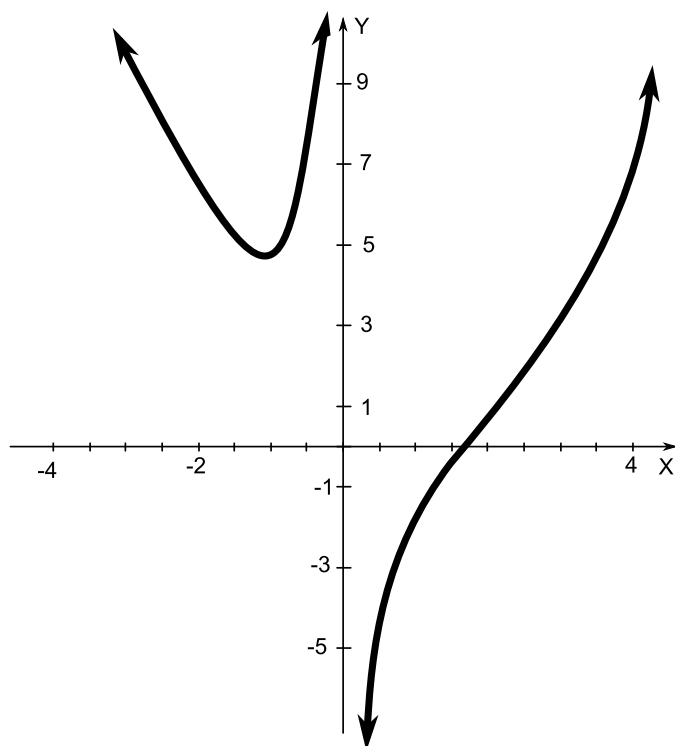


14.6  

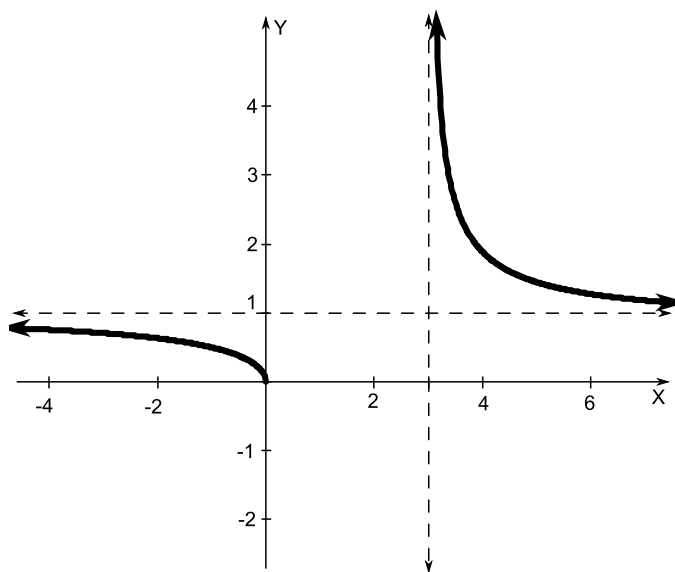
$$1 \quad f'(x) = -\frac{10x}{(4-x^2)^2}, \quad f''(x) = -\frac{10(3x^2+4)}{(-x^2+4)^3}$$



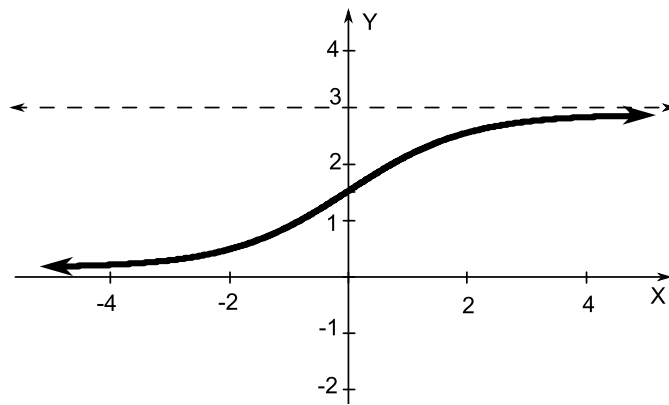
$$2 \quad f'(u) = \frac{2u^3+4}{u^2}, \quad f''(u) = \frac{2(u^3-4)}{u^3}$$



$$3 \quad g'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}(x-3)^{\frac{3}{2}}}, \quad g''(x) = \frac{3\left((x-3)^{\frac{3}{2}} + 3x\sqrt{x-3}\right)}{4x^{\frac{3}{2}}(x-3)^3}$$

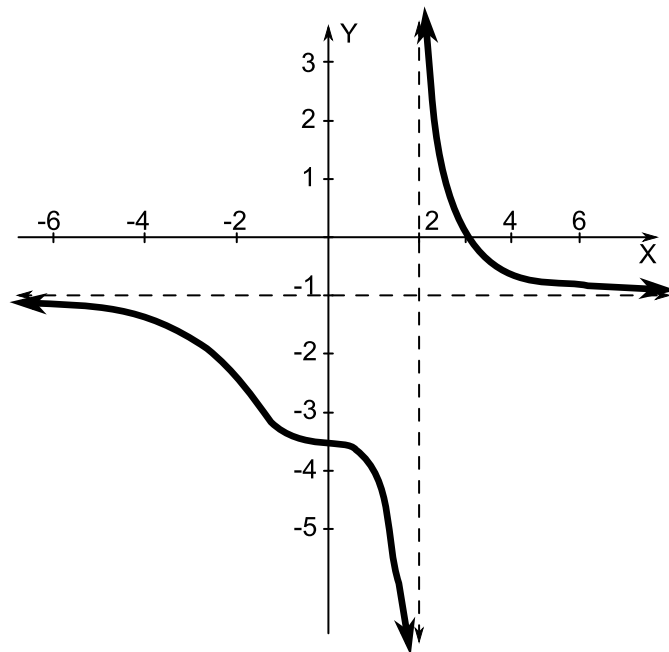


$$4 \quad h'(x) = \frac{3e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad h''(x) = \frac{3e^{-2x}(-e^x+1)}{(e^{-x}+1)^3}$$

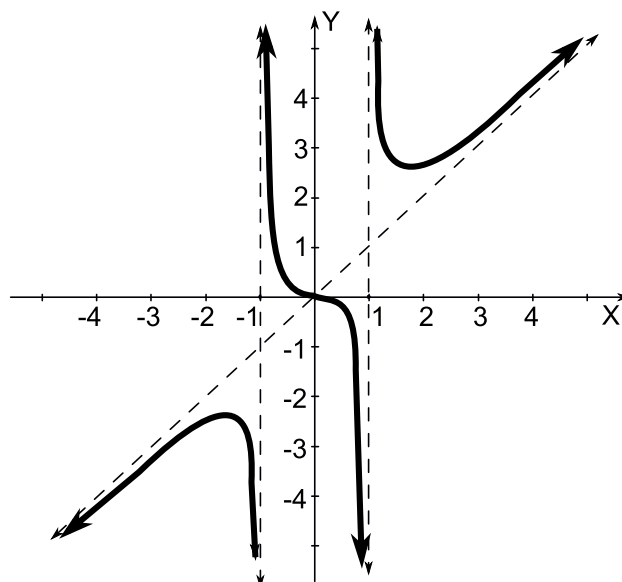


14.7  A.H cuando $x \rightarrow +\infty : y = \frac{-\pi}{4}$, A.V: $x = -3$, A.O: cuando $x \rightarrow -\infty : y = 4x$.

14.8  1



2



16.1

1 2 dm de largo, 2 dm de ancho y $\frac{4}{3}$ dm de alto.

2 $\left(\frac{45}{37}, \frac{63}{37}\right)$

3 A las 2 : 21 : 36 p.m.

4 $y = \frac{-5}{3}x + 10$.

5 Correr 68,956 m; nadar 50,364 m; 1,955 min.

6 Lados rectos de 50 m y ancho $\frac{100}{\pi} \approx 31,83$ m (radio $\frac{50}{\pi} \approx 15,92$ m). Área total de la pista: $\frac{5000}{\pi} + \frac{2500}{\pi} = \frac{7500}{\pi} \approx 2387,32$ m².

7 2.5 cm $\times$ 6 cm.

8 200 m $\times$ 300 m, con la división paralela al lado de 200 m.

9 63.66 m el radio de los semicírculos, 200 m los lados rectos.

10

2.8794 cm el radio de la base, 8.6382 cm la altura; costo 23.44 colones.

11

7.00527 cm el radio del cilindro, 7.00527 cm la altura del cilindro.

12

A = 9 cuando $x = 3$.

13

18.

14

$\frac{3\sqrt{2}}{8}$, entre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{7}{8}, \frac{-1}{8}\right)$.

15

Ancho y largo iguales: 25 metros.

16

Los dos números son iguales a $\sqrt{192} = 8\sqrt{3} \approx 13,86$ (suma mínima $16\sqrt{3} \approx 27,71$).

17

En el círculo hay que emplear 10 metros.

18

4 dm el lado de la base, 2 dm la altura.

19

Ancho: $\frac{3}{2}$; largo: 3.

20

Largo (base) = $5\sqrt{2} \approx 7,07$ y ancho (altura) = $\frac{5}{\sqrt{2}} \approx 3,54$; área máxima = 25.

21

Vol = 4000 cm³ (base de 20 cm de lado y 10 cm de altura).

22

Largo 36 cm y ancho 24 cm.

Soluciones del Capítulo 6

3.1  

$$1 \quad \frac{1}{8}w^2 + \frac{1}{2w^2} + C.$$

$$2 \quad \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} - \frac{4\left(\frac{5}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{5}{3}\right)} + C.$$

$$3 \quad e^q + e^{-q} + C.$$

$$4 \quad -\frac{1}{\ln 2} \ln |5 + t \ln 2 - 2^t| + C.$$

$$5 \quad e^u + 2u - e^{-u} + C.$$

$$6 \quad \sqrt{1 + \ln(u^2 + 1)} + C.$$

$$7 \quad \frac{5r^3}{3} - \csc r + C.$$

$$8 \quad \frac{8v^{\frac{3}{2}}}{9} - \frac{8v^{\frac{1}{2}}}{3} - \frac{2}{3v^{\frac{1}{2}}} + C.$$

$$9 \quad \frac{1}{3} \left(\frac{w^4}{4} - w^2 - 4 \ln |w| - \frac{4}{w^2} \right) + C.$$

10  

$$3 \ln(4q^2 + 7) + C.$$

11  

$$-3z^{-1} - \frac{3}{2} \ln(z^2 + 1) + C.$$

12  

$$-\frac{3 \tan u}{\tan 5} - \frac{3(1 + \tan^2(5))}{\tan^2(5)} \ln |1 - \tan 5 \tan u| + C$$

13  

$$\frac{(5 + 2 \tan \alpha)^{3/2}}{3} + C.$$

14  

$$(\text{Sug: Recuerde que } \tan^2(x) = \sec^2(x) - 1)$$

$$\frac{\sec^3 \alpha}{3} - \sec \alpha + C.$$

15  

$$x - 1 + 2 \ln |x - 1| + C.$$

16  

$$\ln(e^x + 1) + C.$$

17  

$$\frac{-\cos^2(2x)}{4} + C.$$

18  

$$-\frac{\ln^2(\cos x)}{2} + C.$$

19  

$$(\text{Sug: Recuerde que } [x^x]' = x^x(1 + \ln x))$$

$$x^x + C.$$

20  

$$\arctan x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

21  $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x^2 + C.$

22  $\frac{5 \left(\sqrt{1+x^2} \right)^3}{3} + C$

23  $-\frac{2}{3}(1+\cos x)^{3/2} + C.$

24  (Sug: Multiplique por $\frac{1+\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}$ y separe)

$\tan x + \sec x + C.$

25  $\sqrt{3+u^2} + C.$

26  $\frac{5 \ln |2x+1|}{4} + \frac{x}{2} + C.$

27  (Sug: Sustitución y luego separe en fracciones)

$11 \ln |x-1| + x^2 + 6x + C.$

28  $2\sqrt{z+1} + z + 1 + C.$

29  $\ln |\operatorname{sen} x + \cos x| + C.$

30  (Sug: Recuerde que $\csc(x) \sec(x) = 2 \csc(2x)$)
 $\frac{\ln^2 |\tan(x)|}{2} + C$

31  (Sug: Sustitución y $\frac{2}{u^2-1} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}$)
 $\ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C.$

32  $\frac{4 \left(\sqrt{1+\sqrt{x}} \right)^3}{3} - 4\sqrt{1+\sqrt{x}} + C.$

33  $\frac{2\sqrt{(x+1)^3}}{3} - 2(x+1) + 6\sqrt{x+1}$
 $-12 \ln (\sqrt{x+1}+2) + C.$

34  $\frac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3} - 8\sqrt{x+3} + 16 \arctan \left(\frac{\sqrt{x+3}}{2} \right) + C.$

35  $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln |\sqrt[6]{x}-1| + C.$

36  $\frac{3 \ln |\sqrt[3]{x^2}-1|}{2} + C.$

37   $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2} \arctan\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}\right) + C$

38   $-\frac{2}{3}y^2(9-y^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(9-y^2)^{\frac{5}{2}} + C$

5.1  

1 (Sug: Recuerde que $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$)

$\frac{3x}{2} + \cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(4x) + C.$

2 $\frac{\sec^3 x}{3} + C.$

3

(Sug: Recuerde que $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$ y luego haga una sustitución)

$\frac{1}{2}\tan^2 x + C.$

4 $\frac{1}{5}\sec^5 z - \frac{1}{3}\sec^3 z + C.$

5 $\ln|4 + \tan x| + C.$

6 (Sug: Multiplique por $\frac{1 + \sin(x)}{1 + \sin(x)}$ y luego haga una sustitución)

$\ln|1 + \sin x| + C.$

7 $\frac{2}{7}(1 + \cos x)^{7/2} - \frac{4}{5}(1 + \cos x)^{5/2} + C.$

8 $2\tan x + 2\sec x - x + C.$

9 $\frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + C.$

10   $-\frac{1}{3}(\cos 3x - \frac{1}{3}\cos^3 3x) + C.$

11   $-\frac{1}{3}\cot^3 x + \cot x + x + C.$

12   $\frac{1}{25}\tan^5(5z) + \frac{1}{15}\tan^3(5z) + C.$

7.1  

1 $\ln\left|\frac{x + \sqrt{9 + x^2}}{3}\right| + C.$

2 (Sug: Recuerde que $\sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$)

3 $\operatorname{arcsen}\left(\frac{r}{2}\right) - \frac{r\sqrt{4-r^2}}{2} + C.$

3 $-\frac{1}{25\sqrt{4x^2-25}} + C$

4 (Sug: Completación de cuadrados y haga sustitución)

$\frac{\arctan(x+1)}{2} + \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + C.$

5 (Sug: Completación de cuadrados y $u = x + 2$)

$\frac{x+2}{9\sqrt{-x^2-4x+5}} + C.$

6 $4\operatorname{arcsen} x + C.$

7 $\frac{\sqrt{u^2-5}}{25u} - \frac{\sqrt{(u^2-5)^3}}{75u^3} + C.$

8 (Sug: Completación de cuadrados y sustitución)

$$\arcsen\left(\frac{z+1}{2}\right) - \sqrt{3-2z-z^2} + C.$$

$$9 - \operatorname{arccot}\left(\sqrt{x^2+2x}\right) + C, \text{ en cada intervalo del dominio.}$$

$$10 \quad -\frac{\sqrt{25-x^2}}{25x} + C.$$

$$11 \quad \left(\text{Sug: Sustitución trigonométrica y multiplique por } \frac{\cot(u) + \csc(u)}{\cot(u) + \csc(u)}\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3}}{x} \right| + C.$$

$$12 \quad \left(\text{Sug: Recuerde que } \tan^2(x) = \sec^2(x) - 1\right)$$

$$\sqrt{9x^2-4} - 2 \operatorname{arcsec}\left(\frac{3x}{2}\right) + C.$$

$$13 \quad -\frac{4x+7}{6(x^2+2x+4)} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) \right) + C$$

$$14 \quad \left(\text{Sug: Completación de cuadrados y sustitución}\right)$$

$$\frac{1}{3} \ln \left| \frac{3x+1+\sqrt{9x^2+6x-8}}{3} \right| + C.$$

$$15 \quad \arcsen(x-2) + C.$$

$$16 \quad \left(\text{Sug: Reescriba } \cos^2(x) = \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\arcsen z + z\sqrt{1-z^2}}{2} + C.$$

$$17 \quad -\arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) + \sqrt{x^2-1} + C.$$

$$9.1$$

$$1 - e^{-w}(w+2) + C.$$

$$2 \quad \frac{1}{\ln 10} \left[y \ln |5y^2 - 4y| - 2y - \frac{4 \ln |5y - 4|}{5} \right] + C$$

$$3 \quad y \arcsen(2y) + \frac{\sqrt{1-4y^2}}{2} + C.$$

$$4 \quad \frac{p(p-2)e^{p(p-2)}}{2} + C$$

$$5 \quad \frac{e^t}{(t+1)} + C.$$

$$6 \quad \frac{\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|}{2} + C.$$

$$7 \quad \frac{r[\cos(\ln r) + \sin(\ln r)]}{2} + C.$$

$$8 \quad (y^3 + y) \ln(y^2 - 1) - \frac{2y^3}{3} - 4y + 2 \ln \left| \frac{y+1}{y-1} \right| + C.$$

$$9 \quad \frac{w^2 8^{w^2+1}}{2 \ln 8} - \frac{8^{w^2+1}}{2 \ln^2 8} + C.$$

10  $\frac{-\ln|z|}{(z+1)} + \ln|z| - \ln|z+1| + C.$

11  $\frac{x \ln|x| - x}{2} + C.$

12  $x \sec x - \ln|\sec x + \tan x| + C.$

13  $\frac{x^2 \arctan(x) + \arctan(x) - x}{2} + C.$

14  Sug. 1ro $u = e^{-x^2}$, luego partes.

$$-\frac{x^2 e^{-x^2}}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} + C.$$

15  $x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsen x + C.$

16  $\frac{e^{2\theta} (2 \sen 3\theta - 3 \cos 3\theta)}{13} + C.$

17  $-e^{-w}(w^2 + 2w + 2) + C.$

18  $x \ln \sqrt{x} - \frac{x}{2} + C.$

19  $\sen x \cdot \ln|\sen x| - \sen x + C.$

20  $\sen x \cdot \ln|\sen x| - \sen x + C.$

9.2  (Sug: Use $|x| = \sqrt{x^2}$ y eventualmente hay que racionalizar)

Como $|x| = \sqrt{x^2}$ entonces

$$\int |x| dx = \int \sqrt{x^2} dx$$

Ahora si $u = \sqrt{x^2}$ y $dv = dx$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \sqrt{x^2} dx = x\sqrt{x^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2}} dx \\ \phantom{\int \sqrt{x^2} dx} = x\sqrt{x^2} - \int \sqrt{x^2} dx \end{array} \right.$$

$$\therefore 2 \int \sqrt{x^2} dx = x\sqrt{x^2}$$

Es decir, $\therefore \int \sqrt{x^2} dx = \frac{x|x|}{2} + K$

11.1 

$$1 \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \quad 2 \quad 2 \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 3 \arctan x + C.$$

$$3 \quad -\frac{9}{4(2p-1)} + \frac{1}{4} \ln|2p-1| + \ln|p| - \ln|p+2| + C.$$

- 4 $\frac{4}{z} - \frac{3}{z+1} - 3 \ln|z+1| + 3 \ln|z-1| + C.$
- 5 $-\frac{318}{625} \ln|u-2| - \frac{66}{125(u-2)} - \frac{13}{25(u-2)^2} + \frac{318}{625} \ln|2u+1| - \frac{186}{125(2u+1)} + C.$
- 6 $\frac{5}{3} \ln|u+2| - \frac{2}{3} \ln|u-4| + C.$
- 7 $w + \ln|w| + 2 \ln|w+2| + 9 \ln|w-4| + C.$
- 8 $\frac{\ln|x-2|}{12} - \frac{\ln|x+2|}{28} - \frac{\ln|x-5|}{21} - \frac{1}{x-5} + C.$
- 9 $2 \log_3|3^x-2| + 2 \log_3|3^x+1| - 3x + C.$

10  $x - \ln|x| + 2 \ln|x-1| + C.$

11  $-\frac{1}{36} \ln|x+5| + \frac{1}{6(x+5)} + \frac{1}{36} \ln|x-1| + C.$

12  $\frac{\ln|x-1|}{3} - \frac{\ln|x^2+x+1|}{6} - \frac{\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + C.$

13  $3 \ln|x| + \frac{3}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \ln|x^2+4| + C.$

14  $2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + C.$

15  $\frac{5}{4} \ln|2x+1| + \frac{x}{2} + C.$

16  $11 \ln|x-1| + x^2 + 6x + C.$

- 13.1  $\frac{2}{3} (e^x+1)^{3/2} - 2\sqrt{e^x+1} + C.$
- 1 $\frac{-x}{4\sqrt{x^2-4}} + C.$ 3 $\frac{1}{2} \ln|4x^2+4x+5| - \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2x+1}{2}\right) + C.$
- 4 $\frac{-2 \ln(2x)}{\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{x}} + C.$
- 5 $\frac{8}{3} \arcsen(3x-1) - \frac{1}{3} \sqrt{6x-9x^2} + C.$
- 6 $-\sqrt{4-2x-x^2} - \arcsen\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + C.$
- 7 $\frac{x^3}{3} + \ln|x^2-3x| + C.$
- 8 $3 \ln|x-2| - \frac{1}{2} \ln|x^2+3| + \frac{5}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C.$
- 9 $\frac{9x-13}{\sqrt{x^2-2x+2}} + C.$

10  $2 \arcsen\left(\frac{1}{2} \ln y\right) + \left(\frac{1}{2} \ln y\right) \sqrt{4 - \ln^2 y} + C.$

11  $-\frac{\sqrt{1+e^{2u}}}{e^u} + C.$

12  $\arctan q + \ln|q| - \frac{1}{2} \ln|q^2+1| + C.$

13  $\frac{-(q^2 + 4)}{32q\sqrt{q^2 + 8}} + C.$

14  $\ln|\sec t + \tan t| - \ln|\cos t| + C.$

15  $-\frac{1}{2t^2} - \ln|t| + \ln|3t - 2| + C.$

16  $\frac{1}{2} \ln^2(\ln x) + C.$

17  $\frac{2}{7} \sqrt{\sin(7x) - \cos(7x)} + C.$

18  $\frac{1}{2} (\cos y^2 + y^2 \sin y^2) + C.$

19  $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4x + 6) - \frac{5}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{2}}\right) + C.$

20  $\ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 2} \right| + C.$

21  $26 \ln|x - 3| - 22 \ln|x - 2| + \frac{9}{x - 2} + C.$

22  $\ln|\sec(\ln(4z)) + \tan(\ln(4z))| + C.$

23  $x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C.$

24  $-\frac{1}{4} \sec^4(1 - u) + C$

25  $\frac{2x + 5}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} + C$

26  $\frac{a^x}{\ln a} \left(x^2 - \frac{2x}{\ln a} + \frac{2}{\ln^2 a} \right) + C, \text{ para } a \neq 1. \text{ Para } a = 1, \text{ la integral es } x^3/3 + C.$

27  $2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.$

28  Sug: $x = \frac{1}{t}$

$-\arcsen\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C, \text{ si } x > 1;$

$-\arcsen\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C, \text{ si } x < -1.$

29  $-\frac{\arcsen x}{x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1}{\sqrt{1 - x^2} - 1} \right| + C.$

30  $\frac{1}{3} x \sin(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + C.$

31  $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} - \arcsen y + C.$

32  $2\sqrt{1+\sen^2(x)} + C.$

33  $e^x \ln|e^x + 1| - e^x + \ln|e^x + 1| + C.$

34  $\frac{-1}{\sqrt{2x+x^2}} + C.$

35  $-5\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{3}(\sqrt{\arcsen x})^3 + C.$

36  $e^x \arctan(e^{-x}) + \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C.$

37  $(x+1) \ln(x^2+2x+5) - 2x + 4 \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$

13.2  Al derivar el lado derecho se obtiene $6 \frac{\frac{1}{2}e^{x/2}}{e^{x/2}+2} = \frac{3}{1+2e^{-x/2}}$, que es el integrando.

13.3  $\frac{d}{dx}(e^x \ln x) = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} = \frac{e^x(1+x \ln x)}{x}.$

13.4 

1 Tomando $u = \ln x$ y $dv = x^n dx$, se tiene $du = dx/x$ y $v = x^{n+1}/(n+1)$. La fórmula resulta directamente de $\int u dv = uv - \int v du$.

2 Con $u = \sen^{n-1} x$ y $dv = \sen x dx$, $du = (n-1) \sen^{n-2} x \cos x dx$ y $v = -\cos x$. Al usar $\cos^2 x = 1 - \sen^2 x$ y despejar $\int \sen^n x dx$, se obtiene la fórmula.

3 Aplicando la fórmula anterior con $n = 2$ se obtiene $\int \sen^2 x dx = -\frac{1}{2} \sen x \cos x + \frac{x}{2} + C.$

13.5 

1 $p(w) = w^2 + w + 2.$

2 $z'(r) = 2r^3 + 2r - \frac{1}{r} + 2.$

$z(r) = \frac{r^4}{2} + r^2 - \ln|r| + 2r - 3.$

3 $q'(t) = 4t^3 - 6t^2 - e^t + 1.$

$q(t) = t^4 - 2t^3 - e^t + t + e.$

13.6  $f(x) = 12x^2 + e^{2(x+1)} + 12x - 4$

13.7  $f(2) = 10, f(x) = x^2 + x + 4.$

Soluciones del Capítulo 7

2.1 

1 $\frac{(e-1)^5}{5}$

2 45

3 3

$$4 \quad \frac{-\pi}{6}$$

$$5 \quad \frac{25}{2}$$

$$6 \quad \frac{886}{9}$$

$$7 \quad \frac{1}{15}$$

$$8 \quad \frac{1}{6} \ln \left(\frac{47}{15} \right)$$

$$9 \quad \ln 2 - 1$$

$$10 \quad \frac{38}{3}$$

$$11 \quad 16 - 5\sqrt{3}$$

$$12 \quad 36 \ln 3 - \frac{104}{9}$$

$$13 \quad 0$$

$$14 \quad \frac{28 - 32 \ln 8}{\ln^2 8}$$

$$15 \quad 2e - 1$$

$$16 \quad \frac{2 \ln 4 + 4}{14} - \frac{2 \ln 25 + 4}{35} \approx 0.185535$$

$$17 \quad \frac{107}{10}$$

$$18 \quad 2 - \frac{\pi^2}{2}$$

$$19 \quad 31$$

$$20 \quad \frac{5}{4} \arctan \left(\frac{1}{2} \right)$$

$$21 \quad 4$$

$$22 \quad \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$$

$$23 \quad \frac{\pi}{9}$$

$$24 \quad -4$$

$$2.2 \quad g(u) = \arcsen \left(\frac{u}{2} \right) + \sqrt{4 - u^2} - 1$$

2.3   f es acotada y coincide con la función escalonada g ($g = 0$ en $[a, c[$, $g = 1$ en $[c, b]$) salvo en el punto $x = c$; entonces $\int_a^b f = \int_a^b g = \int_a^c 0 \, dx + \int_c^b 1 \, dx = b - c$.

2.4   Con $x = \sin t$ se tiene $dx = \cos t \, dt$, y los límites $t = 0$, $t = \pi/2$ pasan a $x = 0$, $x = 1$; luego ambas integrales valen $\frac{2}{3}$.

2.5   Con $s = at$ se tiene $ds = a \, dt$ y $a^2 + s^2 = a^2(1 + t^2)$, de modo que $\int_0^x \frac{ds}{a^2 + s^2} = \int_0^{x/a} \frac{a \, dt}{a^2(1 + t^2)} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$.

4.1  
1 0,74984; 0,950158; 1,08461. 2 1,7154; -0,3125; -2,6054.

4.2  
1 Izquierdos: 0,982130; medios: 1,160614; derechos: 1,328703.
2 Izquierdos: 0,324540; medios: 0,410727; derechos: 0,324540.

4.3  
1 $-\frac{15}{332}$
2 $\frac{3}{3}$
3 0
4 $-\frac{33}{2}$
5 $-\frac{16}{3}$
6 10

4.4   Con la partición regular $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ y $\xi_k = x_k$: $\sum_{k=1}^n x_k \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \left[na + \frac{b-a}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \right] = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$, que tiende a $a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}$ cuando $n \rightarrow \infty$.

4.5   $20,375 < 24 < 27,875$

6.1  
1 $F'(t) = -\ln(6 + t^2)$
2 $F'(t) = te^t$
3 $F'(r) = \pi \cos(r\pi) \sqrt[5]{\sin^2(r\pi) + 1}$
4 $F'(y) = \frac{3 \operatorname{sen}(y^{3/2})}{2y} - \operatorname{sen}(e^y)$
5 $F'(x) = -\cos(x^2)$
6 $G'(x) = 3x^2 \ln x^3 - 2x \ln x^2$
7 $F'(x) = \frac{3(1-3x)^3}{(1-3x)^2 + 1}$

6.2   $c \in \left\{ \frac{\pi}{3} + 2\pi k \vee \frac{-\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.3   a) $f(x) = 2x^{15}$, b) $c = -\frac{1}{9}$

6.4   $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}}$ y $a = 9$

6.5  Por el TFC, $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ y entonces $f''(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}}}{a^2 + x^2} = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (pues $a \neq 0$); luego la gráfica es cóncava hacia arriba.

6.6  -7

6.7  -1

6.8  $x = 0$ o $x = \pm\sqrt{2}$

6.9  10

6.10  12

8.1 

1 $A = \frac{61}{2} (\text{ul})^2$

2 $A = 18(\text{ul})^2$.

Observe que: $A = \int_{-2}^4 \left(y + 5 - \frac{y^2 + 2}{2} \right) dy$.

O bien: $A = \int_1^3 2\sqrt{2x-2} \, dx + \int_3^9 \left(\sqrt{2x-2} - (x-5) \right) dx$

3 $A = \frac{4}{3} (\text{ul})^2$

4 $A = 4 (\text{ul})^2$

5 $A = 9 (\text{ul})^2$

6 $A = 68 (\text{ul})^2$

7 $A = 4 (\text{ul})^2$

8 $A = \frac{9}{2} (\text{ul})^2$

9 $A = \frac{38}{3} (\text{ul})^2$.

Observe que: $A = \int_0^2 [4 + y - (-y^2)] \, dy$ O bien: $A = \int_{-4}^0 (2 - \sqrt{-x}) \, dx + \int_0^4 2 \, dx +$

$\int_4^6 [2 - (x-4)] \, dx$

8.2  $A = 19 (\text{ul})^2$

8.3  $A \approx 1.6042 (\text{ul})^2$

8.4  $A = \frac{2197}{150} (\text{ul})^2$

8.5  $A = \frac{2}{3} (\text{ul})^2$

8.6  $A = \frac{13\sqrt{13} + 5\sqrt{5}}{12} (\text{ul})^2$

8.7  $A = \frac{49}{12} (\text{ul})^2$

8.8  $A = \frac{7}{3} (\text{ul})^2$

8.9  $A \approx 1,325 (\text{ul})^2$

8.10  $A \approx 3,6931 (\text{ul})^2$

8.11   $A \approx 3,1831 \text{ (ul)}^2$

8.12   $A = \frac{47}{3} \text{ (ul)}^2$

10.1  

1 Converge a: $\frac{\pi}{2}$.

2 Converge a: 6.

3 Converge a: -1 .

4 Diverge.

5 Converge a: π .

6 Converge a: $\frac{\pi}{2}$.

7 Diverge.

8 Converge a: $\frac{1}{a}$ si $a > 0$ y diverge si $a \leq 0$.

9 Converge a: $\frac{3\pi^2}{32}$.

10   Converge a: 0.

11   Diverge.

12   Converge a: $\sqrt[4]{8}$.

13   Diverge.

14   Converge a: $4 + 2\sqrt{2}$.

15   Converge a: $\frac{1}{4}$.

16   Converge a: 1.