

1 Geometría Analítica

Conocimientos	Habilidades específicas
Circunferencia	1. Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y radio.
Centro	2. Representar algebraicamente una circunferencia.
Radio	3. Aplicar traslaciones a una circunferencia.
Recta secante	4. Resolver problemas de circunferencias.
Recta tangente	5. Clasificar puntos respecto a una circunferencia.
Recta exterior	6. Determinar si una recta es secante, tangente o exterior.
Rectas paralelas	7. Representar rectas secantes y tangentes.
Rectas perpendiculares	8. Analizar paralelismo y perpendicularidad.
	9. Aplicar la propiedad de tangencia.
	10. Usar software para representaciones.

1.1 Circunferencia

Situación problema.

Un movimiento sísmico es una vibración que se origina cuando una porción de la litosfera pierde estabilidad. El punto interior donde se libera la energía se llama *hipocentro*. Cuando las ondas sísmicas llegan a la superficie terrestre y comienzan a propagarse sobre ella en todas direcciones, lo hacen a partir del *epicentro*, que es el punto superficial más cercano al hipocentro.

Las redes sismológicas modernas utilizan varias estaciones distribuidas en una región para registrar y analizar los sismos. En esta situación, se observa que tres estaciones cercanas de la red registran **ondas de intensidad similar casi al mismo tiempo**. Y en esta situación, más allá de estas estaciones la intensidad ya casi no es perceptible.



Figura 1: Onda sísmica detectada por las estaciones A, B y C con similar intensidad

Tomando como referencia la estación central (EC), la ubicación de las otras tres estaciones, expresadas en kilómetros, es la siguiente:

- **Estación A:** 24 kilómetros al norte y 15 kilómetros al este.
- **Estación B:** 30 kilómetros al norte y 6 kilómetros al este.

- **Estación C:** 15 kilómetros al sur y 10 kilómetros al este.

Si estas estaciones recibieron ondas de **igual intensidad** en un mismo intervalo de tiempo, entonces están aproximadamente a la *misma distancia*, medida sobre la superficie, del epicentro del sismo. Esto implica que dicho epicentro se localiza en un punto que está a igual distancia de A, B y C, es decir, en el **centro de la circunferencia** que pasa por los tres puntos.

Preguntas:

1. ¿Cuál es la ubicación del epicentro con respecto a la estación central EC?
2. ¿Cuál fue el radio de alcance de la onda sísmica?
3. ¿Cómo se podría representar el comportamiento sísmico mediante una relación algebraica?

Definición 1 (Circunferencia).

Una circunferencia es el “lugar geométrico” de todos los puntos de un plano que están a una misma distancia fija, llamada radio, de un punto fijo llamado centro.

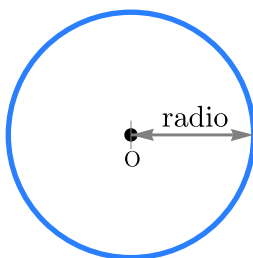


Figura 2: Circunferencia

Definición 2 (Círculo).

Un círculo es el conjunto de todos los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo, llamado centro, es *menor o igual* a una longitud constante llamada radio.

El *borde* de un círculo es una circunferencia.

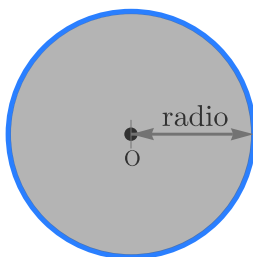


Figura 3: Círculo

Ejemplo 1 (Trazado del “círculo central” en una cancha).

Para marcar el “círculo central” sobre el terreno de juego, es decir, la circunferencia que es borde de este círculo, se determina el punto central del campo y ponemos una estaca que servirá como centro. Luego tomamos una cuerda con la medida adecuada que servirá como radio (según las reglas del deporte), la tensamos y giramos para ir marcando la circunferencia, es decir, el borde del “círculo central”.

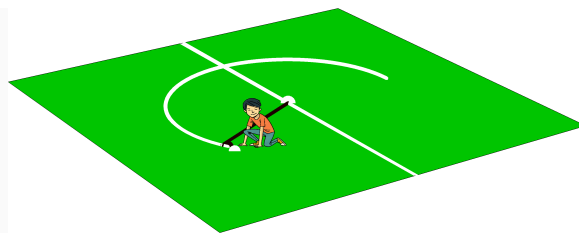
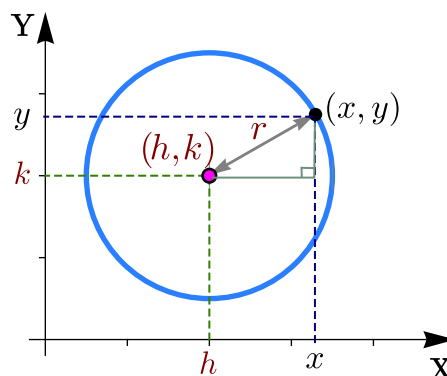


Figura 4: Círculo central

1.2 Centro y radio

En un sistema de coordenadas cartesianas, diremos que el centro tiene coordenada $P(h, k)$ y el radio se denota con la letra r , tal y como se muestra en la Figura center2

Figura 5: Centro $P(h, k)$ y radio r

Ejemplo 2.

A continuación se muestran seis circunferencias. En cada ítem se indica el centro y el radio. En este caso el centro y el radio tienen coordenadas enteras. Vamos verificando que el centro y el radio que se enuncian, efectivamente coincida con la información de la representación gráfica.

1. Circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio 4

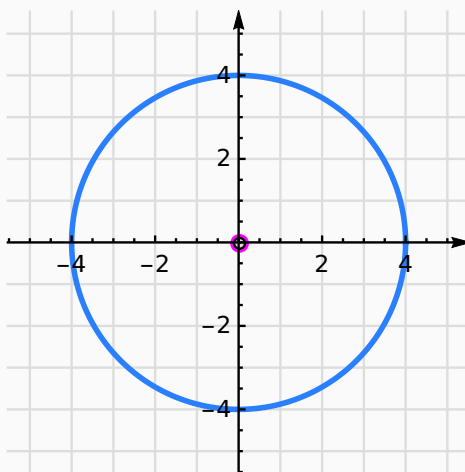


Figura 6

2. Circunferencia con centro en $(0, 2)$ y radio 2

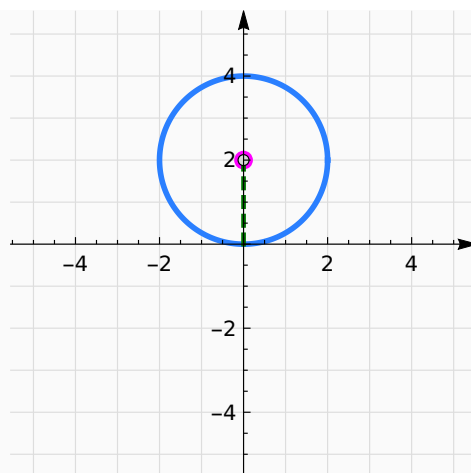


Figura 7

3. Circunferencia con centro en $(0, -2)$ y radio 2

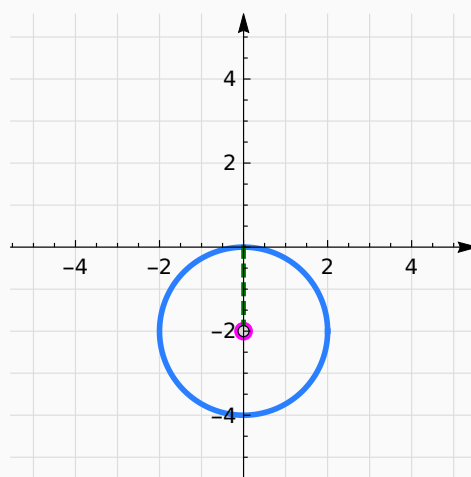


Figura 8

4. Circunferencia con centro en $(1, 1)$ y radio 2

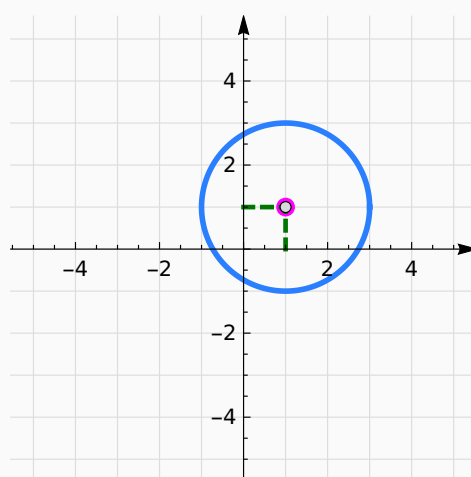


Figura 9

5. Circunferencia con centro en $(-1, -1)$ y radio 4

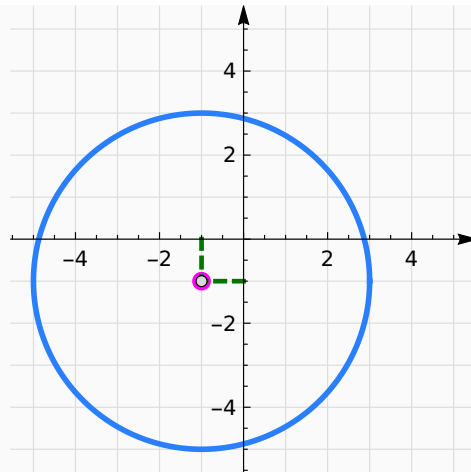


Figura 10

6. Circunferencia con centro en $(-2, 2)$ y radio 2

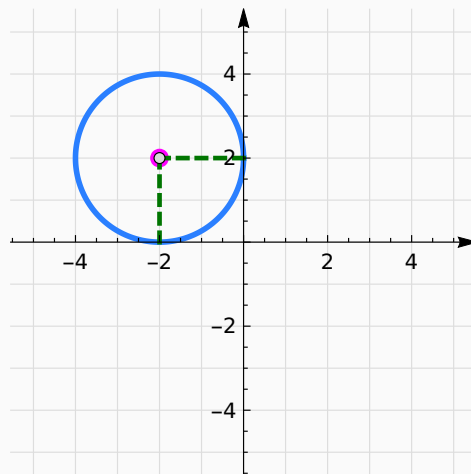


Figura 11

Trabajo Cotidiano.

Ejercicio 1.1

En la siguiente lista de circunferencias, debes observar y analizar para deducir cuál es el centro y cuál es el radio.

Las circunferencias en estos ejercicios tiene centro con *coordenadas enteras* y el radio también es un *número entero*.

1. Circunferencia

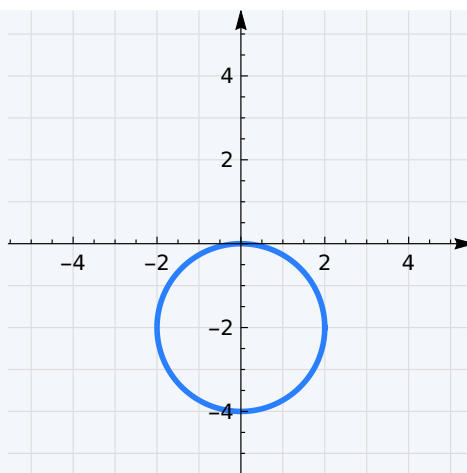


Figura 12

2. Circunferencia

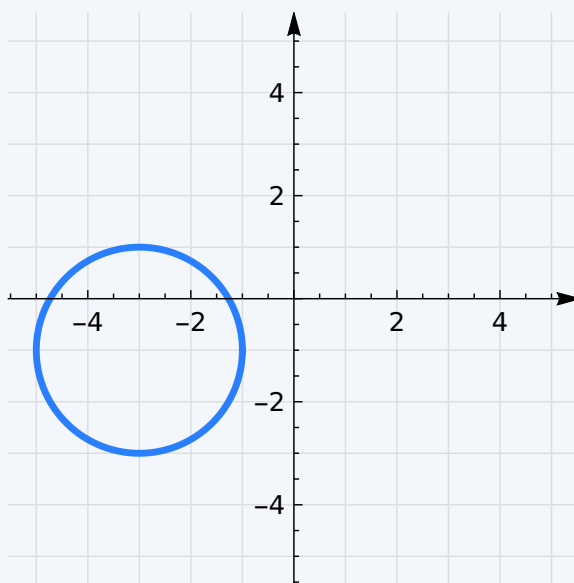


Figura 13

3. Circunferencia

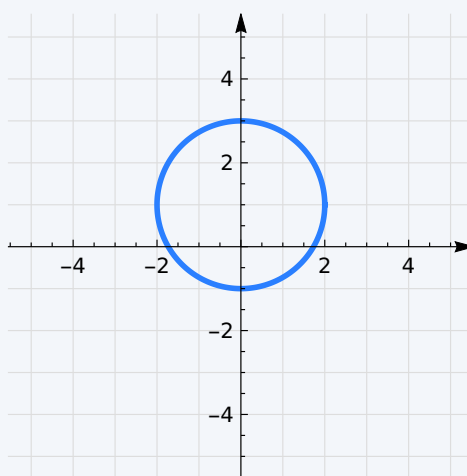


Figura 14

4. Circunferencia

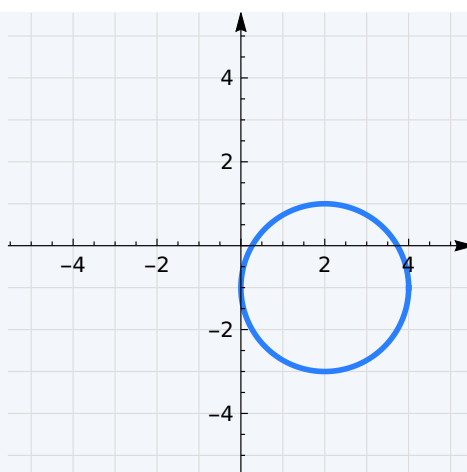


Figura 15

5. Circunferencia

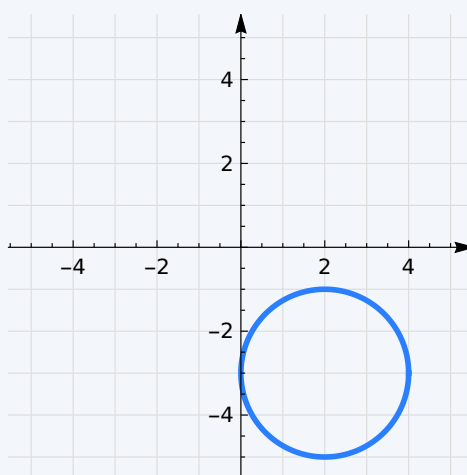


Figura 16

6. Circunferencia

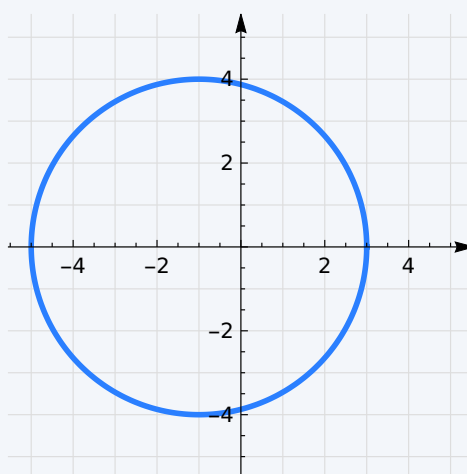


Figura 17

En un sistema de coordenadas cartesianas, podemos establecer una ecuación de una circunferencia de centro $P(h, k)$ y el radio r , tal y como se muestra en la Figura center9

Para establecer esta ecuación podemos usar la fórmula de distancia (o lo que es lo mismo, el Teorema de Pitágoras) entre un punto (x, y) en la circunferencia y el centro (h, k) .

La distancia de (x, y) a (h, k) es r , es decir,

$$\sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r$$

Y acostumbramos escribir esta ecuación de la circunferencia como

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

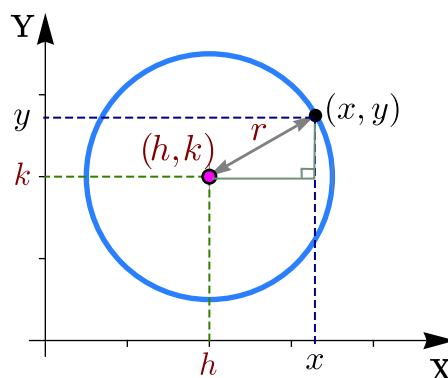


Figura 18: Centro $P(h, k)$ y radio r

Ejemplo 3.

A continuación se muestran seis circunferencias. En cada ítem se indica el centro y el radio. En este caso el centro y el radio tienen coordenadas enteras. En cada caso vamos a escribir la ecuación de la circunferencia

1. Circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio 4

Ecuación: $x^2 + y^2 = 16$

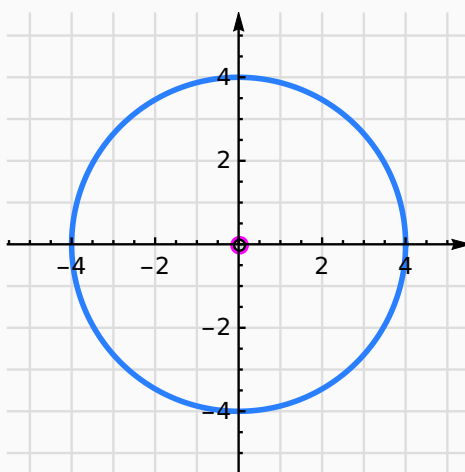


Figura 19

2. Circunferencia con centro en $(0, 2)$ y radio 2

Ecuación: $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

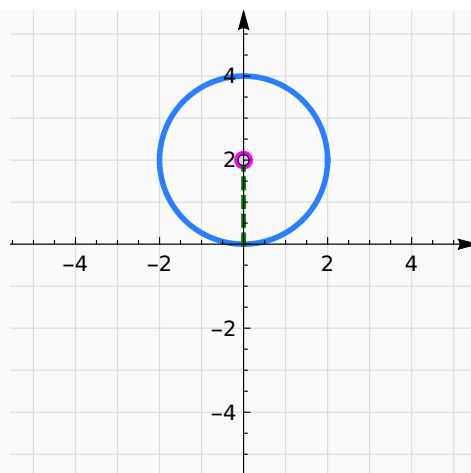


Figura 20

3. Circunferencia con centro en $(0, -2)$ y radio 2

Ecuación: $x^2 + (y + 2)^2 = 4$

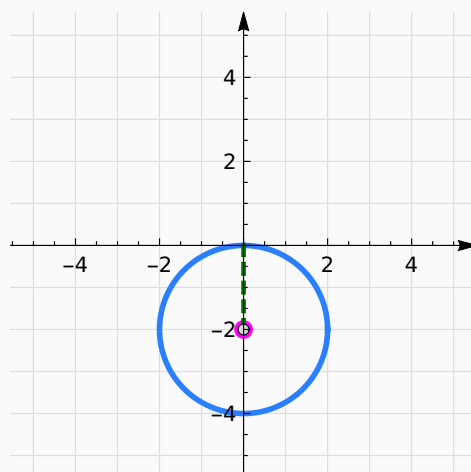


Figura 21

4. Circunferencia con centro en $(1, 1)$ y radio 2

Ecuación: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

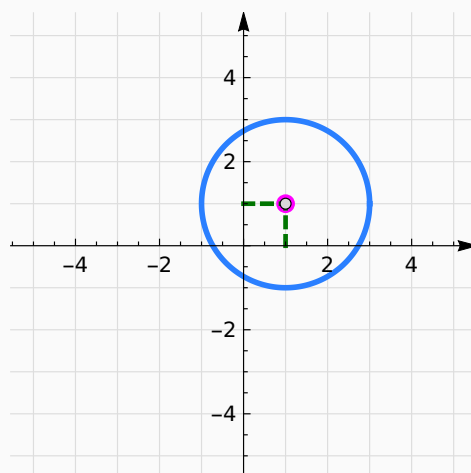


Figura 22

5. Circunferencia con centro en $(-1, -1)$ y radio 4

Ecuación: $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$

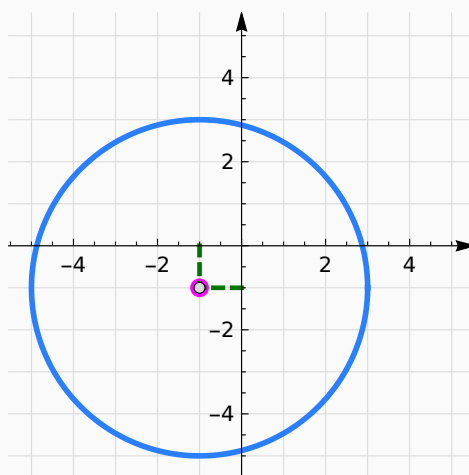


Figura 23

6. Circunferencia con centro en $(-2, 2)$ y radio 2

Ecuación: $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

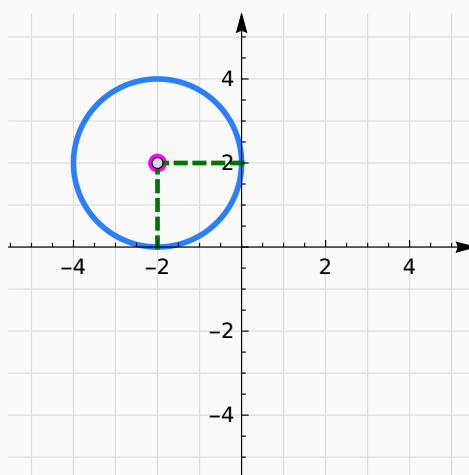


Figura 24

Trabajo Cotidiano.

Ejercicio 1.2

Dada una circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio $r = 3$, escribe su ecuación

Ejercicio 1.3

Dada una circunferencia de centro $(-1, 1)$ y radio $r = 1$, escribe su ecuación

Ejercicio 1.4

¿Cuál es el radio de la circunferencia de ecuación $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$?

Ejercicio 1.5

¿Cuál es el radio y el centro de la circunferencia de ecuación $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$?

1.4 Puntos interior y exteriores a una circunferencia

Usando la misma fórmula para la distancia entre un punto arbitrario $Q(x, y)$ y el centro de una circunferencia de radio r podemos establecer cuándo un punto está fuera de la circunferencia y cuándo está dentro de la circunferencia. Solo hay que notar si la distancia al centro es menor o mayor que el radio, como se muestra en la Figura center16

1. El punto $Q(x, y)$ está en la circunferencia si

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
2. El punto $Q(x_1, y_1)$ está afuera de la circunferencia si

$$(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 > r^2$$
3. El punto $Q(x_2, y_2)$ en el interior de la circunferencia si

$$(x_2 - h)^2 + (y_2 - k)^2 < r^2$$

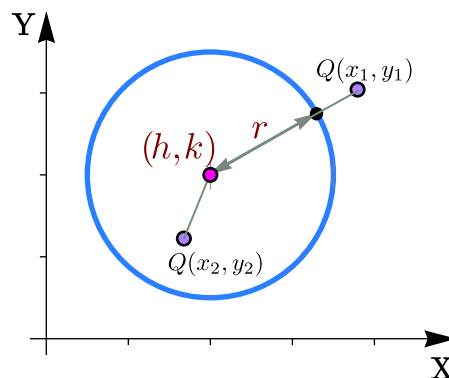


Figura 25

Ejemplo 4.

Considere la circunferencia de ecuación

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

como se muestra en la Figura center17. ¿Cuáles de los siguientes puntos están en la circunferencia, fuera de la circunferencia o en el interior de la circunferencia?

1. $(4, 4)$
2. $(-5, -2)$
3. $(2, 3)$
4. $(0, 0)$
5. $(-2, 4)$

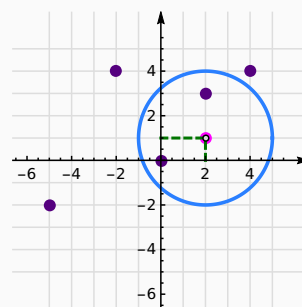


Figura 26

Solución: Lo que debemos hacer es sustituir cada punto en la ecuación de la circunferencia

1. Punto $(4, 4)$:

$$(4 - 2)^2 + (4 - 1)^2 = (2)^2 + (3)^2 = 4 + 9 = 13$$

Como $13 > 9$, el punto es **exterior** a la circunferencia.

2. Punto $(-5, -2)$:

$$(-5 - 2)^2 + (-2 - 1)^2 = (-7)^2 + (-3)^2 = 49 + 9 = 58$$

Como $58 > 9$, el punto es **exterior** a la circunferencia.

3. Punto $(2, 3)$:

$$(2 - 2)^2 + (3 - 1)^2 = (0)^2 + (2)^2 = 0 + 4 = 4$$

Como $4 < 9$, el punto es **interior** a la circunferencia.

4. Punto $(0, 0)$:

$$(0 - 2)^2 + (0 - 1)^2 = (-2)^2 + (-1)^2 = 4 + 1 = 5$$

Como $5 < 9$, el punto es **interior** a la circunferencia.

5. Punto $(-2, 4)$:

$$(-2 - 2)^2 + (4 - 1)^2 = (-4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25$$

Como $25 > 9$, el punto es **exterior** a la circunferencia.

Trabajo Cotidiano.

Ejercicio 1.6

Para la circunferencia dada por la ecuación $(x + 2)^2 + y^2 = 4$, determina si cada uno de los siguientes puntos está en la circunferencia, en su interior o en su exterior:

1. $(-2, 0)$
2. $(0, 0)$
3. $(-4, 0)$
4. $(-2, 2)$
5. $(-2, \sqrt{3})$
6. $(1, 0)$
7. $(-2, \sqrt{5})$
8. $(-5, 0)$

2 Polígonos

Conocimientos	Habilidades específicas
Polígonos	11. Determinar perímetros y áreas de polígonos.
Lado	12. Determinar ángulos internos y externos.
Radio	13. Determinar apotema y radio.
Apotema	14. Calcular áreas con coordenadas.
Ángulo central	15. Resolver problemas con polígonos.
Ángulo interno	16. Estimar áreas irregulares.
Ángulo externo	17. Usar software de geometría.
Diagonal	
Perímetro	
Área	
Relaciones métricas	

3 Visualización Espacial